학교교육연구

제14권 2호 (통권 21호)
2024년 9월 30일

논문

역사 미디어컨텐츠의 현장 역사교육 활용을 위한 제언

신주현 ·· 1

기하학적 공간에서 측지삼각형의 학습을 통한 예비교사교육

김대환 ·· 11

교사 양성 대학에서의 기초해석학의 학습과 지도방안

황진수 ·· 31

교사 양성대학에서의 복소해석학 개론의 학습과 지도에 관한 소고

황진수 ·· 49

융합교육에 대한 중국학생들의 태도 연구

방채홍 ·· 67

대구대학교 사범대학 부설 교육연구소

학교교육연구, 제14권 2호, pp. 1-10(2024. 09.)

역사 미디어컨텐츠의 현장 역사교육 활용을 위한 제언

신주현*

요약

이 논문은 4차 산업혁명과 디지털 리터러시 시대에 맞춰 역사교육에서 디지털 미디어 컨텐츠의 활용 가능성을 탐구한다. 역사영화와 드라마를 교육 자료로 활용하는 연구는 2000년대부터 활발해졌지만, 동아시아적 맥락을 반영한 역사교육의 부족과 교육 자료로서의 객관적 기준 제시가 미흡하다고 지적한다. 동아시아와 세계사적 시야를 담은 역사교재의 필요성을 강조하며, 예시로 영화 <남한산성>과 드라마 <미스터 션샤인>이 동아시아 역사의 맥락을 전달하는 데 효과적임을 설명한다. 나아가 역사 미디어 컨텐츠의 역사성을 평가할 수 있는 ‘역사성 지수’와 같은 시스템의 도입을 제안하며, 이를 통해 역사교육과 미디어 컨텐츠의 효과적 결합을 촉진하려는 방향을 제시한다.

* 대구대학교 사범대학 역사교육과 교수

Ⅰ. 서론

4차 산업혁명, '디지털 리터러시(digital literacy)', AIDT 등 최근 교육계에는 미래 디지털 기술을 활용한 교육의 방법론에 대한 다소 당위적이고 선언적인 담론이 한창이다. 작게는 에듀테크를 활용하여 학교 교육을 수행한다는 이제는 이미 상식이 되어버린 논의에서부터 종이 교과서 시대를 마감하고 디지털 교과서 보급에 속도전을 내겠다는 교육계의 방침에 이르기까지 일선 교육계에는 지금 '디지털시대의 전환'이라는 지상과제가 곧 도래할 것임을 예고하고 있다. 이는 기술의 진보 자체가 추동하고 있는 시대전환의 차원에서의 논의이기도 하지만 다른 한편으로는 현실론, 필연론적인 지점도 존재한다. 바로 '디지털 네이티브(Digital Native)' 세대에 맞는 수용 가능한 효과적인 교육플랫폼을 갖추는 문제가 일선 중고등학교와 교원 양성기관인 사범대학에 하나의 과제처럼 제시되고 있다는 점이다.

'디지털시대의 전환' 논의를 역사교육과의 차원으로 좁혀 보면, 최근 가속화하는 디지털 정책과 맞물려 미래세대 역사교육을 책임질 중등교원을 양성하고자 하는 역사교육과의 고민의 한 축으로서 디지털 미디어를 생산/활용하는 효과적인 역사교육의 내용과 형식을 갖추는 문제가 자리하고 있다. 거시적인 차원에서 교육자와 피교육자, 다양한 디지털 미디어 컨텐츠의 생산자와 소비자 간의 실효적인 소통 가능성을 묻는 이 문제는 사실 역사교육과의 차원에서 한층 손에 잡히는 즉각적인 변화의 차원에서 논의될 성질의 것이기도 하다. 이는 특히 역사 미디어컨텐츠의 생산과 활용의 문제로 연동하여 나타난다. 차원을 달리하는 문제이긴 하지만 이 사안은 다른 한편 사범대학의 재학생이 모두 중등교사가 되지 못하는 현실 속에서 새로운 직군과 산업의 가능성을 모색하는 차원에서도 의미가 있다. 역사교육과의 학제 안에서 미래세대의 역사교육과 직결되는 디지털 미디어 컨텐츠 생산 및 활용능력에 대한 고민은 이렇듯 전혀 선언적인 것이 아니라 현실의 문제로 도래해 있다고 하겠다.

그중에서도 역사학이라는 학문 자체가 가지고 있는 본질적인 특징인 서사, 즉 내러티브를 다룬다는 점에서 디지털 미디어 컨텐츠의 핵심 영역인 영화와 드라마 등을 교육현장에서 활용하는 문제에 집중해서 살펴볼 필요가 있다. 본고에서 이 부분에 천착하는 배경에는 굳이 'K-Culture'나 '한류'의 영향력을 강조하지 않더라도 근래에 생산되어 쏟아져 나오는 영화나 드라마 등의 디지털 영상 컨텐츠가 평균적으로 보여주는 높은 완성도와 전달력이 역사학이라는 내러티브를 다루는 학문과 만났을 때 나타나는 시너지 효과에 대한 기대와 고려가 담겨 있다. 이에 본문의 내용은 크게 세 가지 영역으로 나누어 논의를 이어가고자 한다. Ⅱ장

에서는 역사영화 등 미디어 컨텐츠의 역사교육에 활용하는 문제의식을 제출한 관련 연구성과에 대한 간략한 연구사 정리를 진행한다. 다음 Ⅲ장에서는 앞선 장에서 기존 연구사의 공백으로 지적한 첫 번째 논점인 '동아시아적 시각'의 제시 문제의 해결점을 사례연구를 통해 제시하고, 마지막 Ⅳ장에서는 연구사 공백의 두 번째 논점인 '역사교육 활용에의 기준 제시'라는 문제의식을 발전시킨 대안적 담론의 모색을 시도할 것이다.

Ⅱ. 기존 연구사 정리와 연구 공백

역사영화와 드라마를 다룬 기존의 연구 경향 중에서도 역사교육에의 활용 문제를 다루는 문제는 2000년대 이래 본격적으로 제출되기 시작했다. 이는 이하나가 규정한 역사영화 관련 연구사의 네 가지 방향 가운데 네 번째, 즉 역사교육 교재로 활용하는 문제의식을 제출한 연구 경향에 해당한다고 할 수 있다.[1] 이하나의 기준을 따르자면 다양한 연구 경향 중 하나에 불과하지만 역사영화나 드라마를 역사교육에 직접 활용하는 문제를 다룬 기존 연구성과는 역사영화 등 역사 미디어컨텐츠의 교육 활용 문제에 있어 많은 고민과 제안을 수행해 왔다.[2] 특히 해당 연구가 2000년대 이래 본격화되어 2010년대 이후 특히 두드러지게 나타나고 있음에 주목할 필요가 있다. 이는 역사영화와 드라마 등 역사 미디어 컨텐츠가 그만큼 흥행과 완성도 면에서 지속적인 발전을 이루어내고 있다는 사실과 더불어, 앞서 지적한 대로 디지털 리터러시와 디지털 네이티브 세대에 대한 인식과 담론이 영향을 미친 것으로 보아 크게 틀

1) 이하나는 역사영화를 다룬 기존 연구를 네 가지 범주로 유형화하여 정리하였다. 첫째, 첫째, 역사와 역사 영화의 관계성에 관한 연구; 둘째, 역사영화의 개념과 범주 및 접근법에 관한 연구; 셋째, 개별 작품 분석을 통한 사례연구; 넷째, 역사영화를 역사교육의 도구로 보고 그 구체적 활용방법과 중요성을 피력하는 연구이다. 이하나, 「공공역사로서의 역사영화와 개연성으로서의 역사」, 『역사비평』 139, 2022 여름, pp. 170-171.

2) 박수경, 「역사교육에서 상상과 추론 그리고 역사영화-영화 <남한산성>의 역사교재화를 중심으로-」, 부산대학교 석사학위논문, 2023; 김민정, 「역사 리터러시 함양을 위한 '영화와 역사' 과목 개발 사례 연구」, 『역사교육논집』 78, 2021; 차경호, 「영화 <화려한 휴가>를 활용한 5·18 민주화 운동 수업」, 『역사와 교육』 19, 2020; 이교신, 「고등학교 역사 수업에서 팩션 역사영화의 활용 방안: 영화 <광해, 왕이 된 남자(2012)> 중심으로」, 고려대학교 석사학위논문, 2019; 정종복, 「역사영화 비판적 읽기 교수·학습 방안」, 『역사교육연구』 32, 2018; 유득순, 「질문을 중심으로한 역사영화 탐구수업의 모형 개발과 실제 -한국전쟁 소재의 역사 영화를 중심으로-」, 『역사교육논집』 68, 2018; 유득순, 「학습자료로서 역사영화에 대한 역사교사와 학습자의 인식」, 『역사교육연구』 30, 2018; 유득순, 「역사 수업을 위한 역사영화 활용 방안 모색 -영화 <국제시장>에 대한 학습자의 수용 양상 분석을 중심으로」, 『역사교육논집』 62, 2017; 배설희, 「영화 활용역사수업이 학생들의 역사적 사고력에 미치는 영향」, 고려대학교 석사학위논문, 2009; 오연미, 「역사수업에서의 역사영화 활용의 일례: 「도마 안중근」을 중심으로」, 단국대학교 석사학위논문, 2009; 이혜경, 「영화를활용한 역사수업: 역사적 사고력 향상을 중심으로」, 중앙대학교 석사학위논문, 2005; 이종경, 최재옥, 「영화를 활용한 주제중심 역사수업 모형 개발 및 적용 방안」, 『교과교육학연구』 8, 2004; 최영심, 「역사영화를 활용한 역사적 사고력 신장 방안」, 부산대학교 석사학위논문, 2002.

리지 않을 것이다. 2010년대부터 꾸준히 관련 연구성과를 제시해 온 유득순의 연구가 눈에 띄며 교육대학원에서 제출돼 온 학위논문 역시 이러한 경향과 관심사를 반영하는 것이라 하겠다. 향후 연구의 지속과 새로운 논의의 지평이 열릴 것으로 기대되는 바이다.

다만 역사 미디어컨텐츠의 역사교육 활용 문제에 있어서 그간 자세히 제기되지 않아왔던 두 가지 차원의 논의점이 있다고 생각한다. 첫째, 기존 연구에서는 아직까지 글로벌 히스토리로서의 시야, 이를테면 동아시아적 맥락을 포함한 역사교육이라는 차원에서 문제의식과 방법론, 혹은 사례를 제시한 경우는 찾아보기 어려웠다. 예컨대 최근 제출된 박수경의 석사논문에서 영화 <남한산성>을 역사교재로 활용한 사례를 잘 보여주고 있는데, 그럼에도 불구하고 역사교재 활용의 주요 성취는 한국사 교과서의 편제 속에서 다루어질 뿐이다. 주지하듯이 <남한산성>은 병자호란을 소재로 하고 있으며 중국과의 관계, 구체적으로 이제 막 건국되어 중국을 통일하게 될 이민족 왕조와 이전까지 한족 왕조 명을 사대하던 조선 간의 새로운 관계재정립의 과정에 있는 만큼 한중관계사, 특히 명청교체기 중국사의 맥락을 포함한 중국과 조선 간 정치외교사적 관계에 대한 이해의 폭을 넓힐 수 있는 중요한 주제인데, 여기에서는 결국 한국사 교과서 '왜란과 호란' 단원을 설명할 수 있는 교안 제작 수단으로 수렴하는 것 같다. 표면적으로는 그 자체로 특별히 문제가 있다고는 생각되지 않지만 역사영화가 갖는 전달력과 확장성, 특히 소재 자체가 가지고 있는 동아시아적 맥락을 고려하면 한층 아쉬운 대목인 것도 사실이다. 한국사/동양사/세계사의 경계를 넘어 동아시아적 맥락을 시야에 폭넓게 담아낼 수 있는 역사교육의 실현이라는 차원에서 보편적인 역사교육교재로서의 가능성을 사유하는 단계가 선행되어야 하지 않을까.

둘째, 기존 연구는 아직까지 역사교재로의 활용문제의 보편적 기준 제시에 있어서는 논의를 아끼고 있거나 혹은 그 필요성을 느끼지 못하고 있는 것으로 보인다. 애초에 역사영화 혹은 범위를 좀 더 넓혀서 드라마 등을 포함한 역사 미디어 컨텐츠를 역사교육, 작게는 중고등학교 역사수업에의 활용에서부터 크게는 공공역사학의 실현의 차원에서 학교 바깥의 새로운 역사학 컨텐츠의 생산과 활용 가능성을 모색하는 데 있어서 기성 역사영화 등에 대한 참고 가능한 어떤 기준이 제시되어야 하지 않을까. 이러한 논의가 공론의 장에서, 특히 역사교육학계에서 선도적으로 이루어질 수 있다면 학문적 엄밀성과 역사영화의 확장성이 가장 적절한 형태로 만날 수 있는 계기를 제공할 수 있다는 판단이다. 이어지는 논의를 통해 기존 연구사의 두 가지 보완가능성의 논점을 각각 살펴보도록 하겠다.

Ⅲ. 역사 미디어컨텐츠에서 ‘동아시아적 맥락’을 발견하기

앞서 박수경의 논문을 사례로 삼아 ‘동아시아적 맥락’의 결핍을 지적한 바 있는데, 사실 이는 비단 박수경에게만 해당하는 것이 아니다. 사실상 한국사 수업 일변도로 진행되는 일선 학교의 현장 현실에 비추어 볼 때 이 문제는 과연 해결이 가능할까 싶을 정도로 깊이 고민이 필요한 문제가 된다. 일례로 현행 <동아시아사> 교과목은 일선 학교로부터나 학생으로부터 사실상 외면되다시피하는 현실이다.

이런 상황에서 동아시아를 시야에 넣은 학교교육이 어떠한 형식으로 구축될 수 있는지를 모색한다고 할 때 가장 즉각적이고 실효적인 성과를 거둘 수 있는 방안이 결국 한국사 교과목 내에서 동아시아적/세계사적 맥락을 시야에 두는 교안과 수업 설계일 것이다. 앞서 언급한 대로 <남한산성>은 병자호란을 소재로 삼고 있으며 큰 틀에서 명청교체기 조선의 대외관계 재설정의 문제와 연동되는 내용을 담고 있다. 즉, <남한산성>은 어쩌면 더할 나위 없이 동아시아적 맥락을 소화하는 역사교재로서의 활용 가능성을 담지하고 있는 유용한 역사 미디어컨텐츠라고 할 수 있다. <남한산성>에 입각해서 좀 더 역사교재로서의 가능성 논의를 확장하면 근세시기 동아시아의 조공책봉체제를 이해하는 심화학습의 자료로서 활용 가능성이 높다. 명과 후금 사이에서 쉽지 않은 양자외교에 힘썼던 광해군 시기를 거쳐 인조반정은 통상 후금(이후 ‘淸’으로 국호를 변경)과의 외교관계를 단절하고 명에 대한 확실한 사대로 전환한 외교정책으로의 전환점으로 인식돼 왔다. 이에 따른 후금의 침입과 연이은 인조 치하 조선의 굴욕적인 외교실패와 전란의 경험은 조공책봉체제로 대표되는 당대 동아시아의 지역질서 대한 종합적인 이해 가운데에서 평가할 때에 더욱 유의미한 평가가 가능하다.

이와 유사한 사례로서 드라마 <미스터 션샤인>의 역사교재 활용 여부에서 논의될 수 있는 것이 근대 동아시아 지역질서의 재편 과정에 대한 이해 문제이다. 신미양요로 시작하는 드라마 <미스터 션샤인>은 많은 이들이 소위 ‘인생 드라마’로 꼽을 정도로 큰 흥행을 거두었는데, 19세기 말부터 20세기 초에 이르기까지 서구열강의 동아시아 침탈과 그로 인한 중국 중심 조공체제의 붕괴, 그리고 일본 중심의 새로운 지역질서의 탄생 등 조선을 무대로 당대 열강의 경쟁의 장이 열렸던 현실을 적나라하게 감각하도록 하는 데에 성공을 거둔 점에서 주목된다. 이렇듯 최근 생산 유통된 역사 미디어컨텐츠의 경우 기존 왕조사 중심의 단순화된 구성을 지양하고 다양한 세계사적 동아시아적 맥락이 얽혀있는 역동적인 내러티브를 구현하고 있는 만큼 역사교육에의 활용에서 한국사에 한정한 일국사적 맥락을 넘어서는 문제의식

을 효과적으로 제시할 수 있는 유용한 수단이 될 수 있음을 상기할 필요가 있다.

Ⅳ. 역사 미디어 컨텐츠의 역사교육 활용가능성을 가늠하는 참고 지표의 구상

그런데 아무리 최근 역사 미디어컨텐츠의 역사교육 활용의 가능성이 용이해지고 유의미한 성과를 기대할 여지가 높아졌다 해도 여전히 모든 역사영화나 드라마가 이러한 성취를 거둘 수준에 도달하지 못하고 있는 것 또한 염연한 사실이다. 특히나 강조하고 싶은 것은 애초에 역사영화와 드라마가 다큐멘터리를 지향하거나 역사교재화를 염두에 두고 제작된 것이 아니라는 점이다. 따라서 역사 미디어컨텐츠 자체의 완성도나 활용여부를 가늠할 때 이를 영화 자체에 대한 평가와 결부시키는 것은 적절하지 못하다. 대중이 소비하는 역사 미디어컨텐츠는 그 자체로 흥행과 비평을 통해 평가를 받게 될 것이지만, 이와 별도로 역사영화나 드라마를 역사교육의 수단으로 활용하는 문제에 있어서는 이러한 평가와 결을 달리하는 또 다른 의미의 공신력 있는 검증과 '평가'가 필요하다고 할 수 있다.

기존 연구 성과에서 이러한 문제제기가 구체화되지 못했던 것은 사실상 이러한 판단을 교육자나 컨텐츠 제작자 스스로가 개인의 영역에서 판단 후 선정하고 교육 컨텐츠를 개발하는 것이 당연하게 여겨졌기 때문일 것이다. 이는 한편으로는 교수자의 자율적인 교육 컨텐츠 개발이라는 차원에서 볼 때에는 자연스러운 전제일 수 있다. 본고에서도 이러한 자율성을 제한하는 방식으로, 예컨대 '엄격한 공인'의 방식으로 역사 미디어컨텐츠를 검증하고 평가해야 한다고 주장하는 것은 아니다. 국가기관과 교육기관에서 이러한 평가를 주관해야 한다고 주장하려는 것은 더더욱 아니다.

본고에서 생각하는 평가의 방식은, 기왕 역사 미디어컨텐츠의 역사교육에의 활용도가 높아지는 현실적인 여건과 필요성을 고려해 민간 영역에서 자발적이고 집단적인 방식으로 특정 역사 미디어컨텐츠가 가진 '역사성'에 대해 아무런 구속력이 없으면서도 총체적인 평가기준을 마련하고 이를 실현하는 플랫폼 제작을 시도해 보는 것이다. 요컨대, 역사 영화나 드라마에 한해서 역사교육학계의 '로튼 토마토(Rotten Tomato)' 평점과 같은 '역사성 지수' 평점을 매겨볼 수 있지 않을까.

그렇다면 이 새로운 영역의 역사 미디어컨텐츠 평가는 구체적으로 어떠한 요소를 포함할

수 있을까. 생각건대 역사영화와 같은 미디어 컨텐츠를 역사교육에 활용하는 데에는 두 가지 층위에서 고려해야 할 사항이 존재한다. 첫째 층위는 역사적 사실에 대한 고증부분이다. 전문적인 훈련을 받은 역사 연구자, 가능하면 해당시기 전공자가 대상이 되는 역사 미디어컨텐츠를 세밀하게 검증하고 큰 틀에서 역사적 고증문제에 있어 역사교육에 혼란을 불러일으킬 수 있는지 여부를 묻는 시스템을 갖추고 있어야 한다. 둘째 층위로 역사 해석에 대한 논의가 필요하다. 첫 번째 층위의 논의에서 적어도 대과가 없음이 인정된다면 역사적 사실과 배경의 재현에 있어서 역사영화 자체의 주제의식과 제작자의 의도가 역사학계의 기존 학문적 성취와 담론의 범위에서 어떠한 위치를 점하고 있는지 살펴보아야 한다.

사실 역사 미디어컨텐츠의 역사교육 활용 여부를 판단하는 데 있어서 일선의 교사나 교육기관에서 참조 가능한 기준, 혹은 좀 더 욕심을 내자면 어느 정도 엄정한 공신력을 갖춘 기준점을 제시할 수 있는가의 문제는 결국 역사 미디어컨텐츠에서 제작자의 상상력을 어디까지 허용할 수 있는가 하는 쟁점과 맞물려 있을 수밖에 없다. 이하나와 박수경이 기존 연구에서 거듭 강조한 것처럼 소위 ‘팩션(faction)’이라 할 수 있는 역사 미디어컨텐츠에는 단순한 역사적 사실 고증의 영역으로 접근했을 때 놓치게 되는 또 다른 역사성의 실현인 ‘핍진성’의 성취가 존재한다.[3] 역사 미디어컨텐츠의 최대 장점 중 하나라고 할 수 있는 이 영역에 대한 세밀하고 일관된 평가가 가능할지 여부가 앞서 언급한 ‘공신력 있는 검증과 평가’의 성패를 가르는 중요한 기준점이 될 것으로 생각된다.

Ⅴ. 결론

지금까지 시론적인 문제제기로서 역사 미디어컨텐츠가 역사교육의 방편으로 활용될 때 고려해야 할 지점을 몇 가지 생각해 보았다. 최근 몇 년 간 역사영화 등 미디어 컨텐츠의 역사교육 활용문제가 국내 학계에서 적극적으로 제기되고 있는 것은 한편으로 디지털 미디어 컨텐츠의 폭발적인 증가세와 수용자인 학생들이 태생적으로 디지털 기기와 미디어에 밀착해 있는 현실을 반영하고 있는 것으로 읽힌다. 본고는 이러한 연구 경향에서 좀 더 짚어주었으면 하는 두 가지 사항을 시론적으로나마 제안해 보고자 했다. 첫째, 동아시아적/세계사적 맥락을 시야에 넣은 역사교육을 실현하는 데에 역사 미디어컨텐츠가 효과적으로 활용될 수 있으므로 이러한 사례와 문제의식을 적극적으로 발굴할 필요가 있다. 둘째, 기왕 역사 미디어

3) 이하나, 앞의 논문; 박수경, 앞의 논문.

컨텐츠를 적극적으로 역사교육에 활용할 것이라면 역사연구자와 교사, 전공자들이 집단적으로 참여하는 방식의 역사 미디어컨텐츠 역사성 지수 평점 부여가 필요할 수 있다. 그 자체로 어떤 강제력과 절대적 권위를 갖는 것이 아닌 나름의 공신력을 갖추고 유용하게 활용될 수 있는 '역사성 지수'의 마련은 향후 더욱 폭넓고 엄밀한 역사 미디어컨텐츠 활용의 장을 마련할 수 있지 않을지 조심스럽게 전망해 본다.

참고문헌

김민정, 「역사 리터러시 함양을 위한 ‘영화와 역사’ 과목 개발 사례 연구」, 『역사교육논집』 78, 2021

박수경, 「역사교육에서 상상과 추론 그리고 역사영화-영화 <남한산성>의 역사교재화를 중심으로-」, 부산대학교 석사학위논문, 2023

배설희, 「영화 활용역사수업이 학생들의 역사적 사고력에 미치는 영향」, 고려대학교 석사학위논문, 2009

오연미, 「역사수업에서의 역사영화 활용의 일례: 「도마 안중근」을 중심으로」, 단국대학교 석사학위논문, 2009

유득순, 「역사 수업을 위한 역사영화 활용 방안 모색 - 영화 <국제시장>에 대한 학습자의 수용 양상 분석을 중심으로」, 『역사교육논집』 62, 2017

유득순, 「질문을 중심으로한 역사영화 탐구수업의 모형 개발과 실제 - 한국전쟁 소재의 역사 영화를 중심으로-」, 『역사교육논집』 68, 2018

유득순, 「학습자료로서 역사영화에 대한 역사교사와 학습자의 인식」, 『역사교육연구』 30, 2018

이교신, 「고등학교 역사 수업에서 팩션 역사영화의 활용 방안: 영화 <광해, 왕이 된 남자(2012)> 중심으로」, 고려대학교 석사학위논문, 2019

이종경, 최재옥, 「영화를 활용한 주제중심 역사수업 모형 개발 및 적용 방안」, 『교과교육학연구』 8, 2004

이하나, 「공공역사로서의 역사영화와 개연성으로서의 역사」, 『역사비평』 139, 2022 여름

이혜경, 「영화를활용한 역사수업: 역사적 사고력 향상을 중심으로」, 중앙대학교 석사학위논문, 2005

정종복, 「역사영화 비판적 읽기 교수·학습 방안」, 『역사교육연구』 32, 2018

차경호, 「영화 <화려한 휴가>를 활용한 5·18 민주화 운동 수업」, 『역사와 교육』 19, 2020

최영심, 「역사영화를 활용한 역사적 사고력 신장 방안」, 부산대학교 석사학위논문, 2002.

A Suggestion for Utilizing Historical Media Contents in History Education

Sheen, Joohyun

<Abstract>

This paper considers several points that should be considered when historical media contents are utilized as a method of history education. The fact that the issue of utilizing historical media contents such as historical films for history education has been actively raised in Korean academia in recent years can be read as a reflection of the explosive growth of digital media contents. It can be understood as a reflection of the reality that students, as recipients, are naturally attached to digital devices and media. The paper attempts to propose two points that should be more developed in these research trends: first, historical media contents can be effectively utilized to realize history education with an East Asian/World History context, so it is necessary to actively discover such cases and issues. Second, if historical media contents are to be actively utilized in history education, it may be necessary to give them a historical index rating in a way that history researchers, teachers, and majors collectively participate. We cautiously predict that the establishment of a 'historicity index' that has its own credibility and can be useful, rather than having any force or absolute authority in itself, may pave the way for a wider and more rigorous use of historical media content in the future.

학교교육연구, 제14권 2호, pp. 11-29(2024. 09.)

기하학적 공간에서 측지삼각형의 학습을 통한 예비교사교육

김대환*

요 약

본 논문은 예비교사들에게 비유클리드 기하학을 효과적으로 가르치기 위한 수업설계를 탐구하는 것을 목적으로 한다. 비유클리드 기하학은 유클리드 기하학의 개념의 확장을 포함하고 있으며, 이를 통해 학생들은 수학적 사고의 확장을 경험할 수 있다. 본 연구에서는 비유클리드 기하학 중 쌍곡기하학과 타원기하학을 중심으로, 학생들의 이해를 돕기 위한 교육 방법과 자료를 개발하였다. 연구 방법으로는 문헌 조사, 수업 시연을 통한 피드백 수집을 사용하였다. 연구 결과, 시각적 도구와 실습 활동을 활용한 수업이 학생들의 이해도를 높이고, 추상적 개념에 대한 접근성을 향상시킴을 확인하였다. 또한, 비유클리드 기하학을 유클리드 기하학과 비교하는 접근법이 학생들의 논리적 사고와 문제 해결 능력을 강화하는 데 효과적임을 발견하였다. 본 논문은 교사들이 비유클리드 기하학을 보다 명확하고 흥미롭게 가르칠 수 있도록 돕는 실질적인 수업설계 지침을 제공한다.

핵심어: 비유클리드 기하학, 구면기하학, 쌍곡기하학, 삼각형의 넓이

* 대구대학교 사범대학 수학교육과 교수

Ⅰ. 서 론

예비교사는 학생들에게 수학을 보다 흥미롭고 이해하기 쉽게 전달할 수 있는 다양한 교육적 전략을 탐구하는 자세가 필요하다. 기하학을 활용한 교육 전략은 이러한 목표를 달성하는 데 매우 효과적이다. 유클리드 기하학의 기본 개념을 이해시키는 것부터 시작하여, 학생들이 공간적 사고와 시각적 추론 능력을 기를 수 있도록 돕는 다양한 활동을 도입할 수 있다. 또한, 예비교사가 비유클리드 기하학을 포함한 기하학의 다양한 분야를 탐구함으로써 학생들의 학문적 호기심과 창의성을 자극하고, 수학에 대한 깊이 있는 이해를 도울 수 있다. 이러한 접근법은 학생들의 문제 해결 능력을 향상시키고, 기하학적 직관을 확장하며, 수학적 개념을 보다 실제적이고 흥미롭게 느끼게 할 수 있다. 예비교사가 기하학적 공간에서 측지삼각형의 특징과 가우스-보네 정리를 학습하는 것은 이러한 목표를 달성하는 데 매우 도움이 된다.

유클리드 기하학에서 삼각형은 초등학교에서 가장 먼저 다루어지는 도형으로 여러 가지 삼각형에 대한 분류와 이해, 삼각형의 내각의 크기의 합 등의 내용을 포함한다. 또한, 유클리드 기하학과 비유클리드 기하학에서 측지삼각형은 다양한 관점에서 수학적 교육학적 의미를 가진다. 공간에서 직선으로 고려되는 측지선의 일부가 측지삼각형을 구성하는 변으로써 구성되며, 측지삼각형의 내각의 합은 공간의 기하학적 구조와 관련이 있다. 특히, 유클리드 기하학에서 평행선 공리와 삼각형의 내각의 합이 2직각이 되는 것은 동치조건임이 잘 알려져 있다. 예비교사들이 대학과정의 미분기하학에서 배우는 가우스-보네 정리는 공간의 국소적 성질인 곡률과 대역적 성질인 위상수학적 특성 사이의 관계를 학습한다. 이러한 예비교사의 학습 경험은 학생들이 기하학을 단순한 계산이나 추상적 개념으로만 여기지 않고, 실제적이고 의미 있는 방식으로 이해하도록 돕는다. 특히, 대표적인 비유클리드 공간인 구면기하학과 쌍곡기하학에서 측지삼각형의 내각의 합과 넓이의 관계, 가우스-보네 정리를 통한 곡면의 곡률과 곡면 위에서 삼각형 또는 다각형의 내각의 합 사이의 관계는 예비교사들의 기하학적 직관을 넓히고, 복잡한 수학적 개념을 시각화하며 이해하는 데 큰 도움을 준다. 측지삼각형의 성질과 가우스-보네 정리를 포함한 기하학적 주제는 문제 중심 학습(PBL)이나 탐구학습(IBL)과 같은 교수법에 잘 어울리며, 학생들이 실제 문제를 해결하거나 새로운 사실을 발견하는 과정에서 수학적 개념을 깊이 있게 배울 수 있다.

본 연구는 구면기하학과 쌍곡기하학에서 측지 삼각형의 내각 합과 넓이의 관계를 학습함으로써, 학습자들의 기하학적 인지 변화와 그 과정을 탐구하는 것을 목적으로 한다. 특히, 유

클리드 기하학에서 삼각형 내각의 합이 항상 180도인 것과 달리, 구면기하학에서는 내각의 합이 180도를 초과하고, 쌍곡기하학에서는 180도를 미만이라는 점을 통해 학습자들의 기하학적 직관이 어떻게 변화하는지 분석한다. 이를 통해 비유클리드 기하학의 특성을 이해하고 내재화할 수 있도록 수업을 설계하며, 다양한 교수법을 통해 학생들이 직접적인 경험을 통해 이러한 개념들을 체득하게 한다. 이러한 학습 과정은 예비교사들이 비유클리드 기하학의 기본 개념뿐만 아니라 곡률과 기하학적 성질 간의 상호작용을 깊이 이해하고, 이를 교육 현장에서 효과적으로 전달할 수 있는 역량을 기르는 데 기여할 것으로 기대된다.

연구 문제는 다음과 같이 설정된다:

1. 구면기하학과 쌍곡기하학에서 측지 삼각형의 내각 합과 넓이 간의 관계를 이해함으로써 학습자들의 기하학적 인식은 어떻게 변화하는가?
2. 이러한 기하학적 개념을 직접 경험하는 학습 과정이 예비교사들의 교육적 역량 향상에 미치는 영향은 무엇인가?

II. 이론적 배경

1. 유클리드 기하학과 비유클리드 기하학

2022 개정 교육과정(MOE, 2022)에서는 초•중학교에서 다루는 수학적 대상과 기본적인 개념을 '수와연산', '변화와 관계', '도형과 측정', '자료와 가능성' 4개의 영역으로 구성하였다. 초•중학교의 수학교과과정 영역을 동일하게 설정하여 내용을 체계적으로 수정함과 동시에 연속적으로 수학적 대상과 개념을 학습하도록 하였다. 삼각형의 내각의 합은 도형과 측정에서 중요하게 다루어지는 내용이다. 초등학교에서 삼각형의 내각의 합은 학생들의 귀납적 추론을 통한 일반화를 중심으로 설명되며, 교육과정의 변화와 교육의 내용을 바라보는 관점에 따라 두 가지 실험적 방법으로 확인할 수 있다. 삼각형의 세 각의 크기의 합이 제시된 영역은 수학과 교육과정에 따라 5~7차 교육과정에서는 도형의 영역으로 삼각형의 세 모서리를 이어 붙이는 방법과 2007, 2009, 2015, 2022 개정 교육과정에서는 측정의 영역으로 삼각형의 세 내각의 크기를 재고 합하는 방법으로 나누어진다. 초등수학의 수준과 목표를 고려한 교육과정의 구성인 만큼 측정의 오차에 대한 이해와 일반성을 가지는 설명 역시 고려의 대상이 된다. 초등학교 수학에서 삼각형 내각의 합과 평행선의 성질의 관련성은 도형 및 기하 관련 교육과정 구성에 대한 지침을 정하는 중요한 관점을 준다(홍갑주 & 송명선(2013), 임재훈

(2009), 김지현 & 김상미(2022)). 이와 같은 관점은 기하학을 구분하는 기준 중에 하나인 평행선공리와 그 동치관계에 있는 삼각형 내각의 합, 비유클리드 기하학에서 가우스-보네 정리와도 큰 연관이 있다. 본 연구의 학습요소인 다양한 공간에서 삼각형의 내각의 합을 통해 2022 수학과 개정 교육과정에서 강조하는 '문제해결, 추론, 의사소통, 연결, 정보처리'를 중심으로 비유클리드 기하학의 개념을 활용하여 유클리드 기하학의 이해를 높이는 핵심 아이디어가 된다.

Krause (Krause, 1973)는 비유클리드 기하학이 유클리드 기하학에 대한 학생들의 통찰력을 심화시킬 수 있고, 기하학적 개념을 이해하고 확장하는 것은 다양한 관점을 제공하여 학생들의 수학적 이해를 높일 수 있다고 하였다. 이러한 관점은 기하학 교육에서 다양성과 창의성을 중요시하는 교육적 전략의 필요성을 강조한다. Hollebrands (Hollebrands et al., 2010)에 따르면, 서로 다른 공리계를 학습하는 것은 학생들에게 어려움을 초래할 수 있으며, 이로 인해 기하학에 대한 이해가 크게 변할 수 있다. Kinach (Kinach, 2012)은 서로 다른 기하학에서 유클리드 공리, 개념, 정리에 대한 학생들의 통찰력 발달을 조사하는 추가 연구의 필요성이 제기되었다. 진선숙(2019)은 유클리드 기하학, 구면기하학, 쌍곡기하학 등 다양한 기하학의 학습이 학생들에게 수학에 대한 부정적 인식을 긍정적으로 변화시키는 데 기여할 수 있다고 언급하며, 수학이 다양한 세계를 바라보는 시각에서 변화하고 발전해 온 학문임을 강조한다. 비유클리드 기하학의 개념은 예비교사들에게 새로운 상위 개념을 이해하는 기회를 제공하고, 동시에 수학적 지식을 보다 다양한 관점으로 확장하는 기회를 준다. 이를 통해 유클리드 기하학의 학습과 비교하여 깊이 있는 수학적 통찰력과 수학 문제 해결 능력을 개발할 수 있다는 가능성을 시사한다. 또한, 다양한 기하학적 개념을 탐구하고 이해함으로써 수학적 지식을 더욱 풍부하게 발전시킬 수 있으며, 이를 통해 현대 사회에서 요구되는 창의적이고 유연한 사고를 키우는 데에도 기여할 것으로 기대된다.

예비교사의 기하학 교육은 다양한 컨텐츠가 있지만, 유클리드 기하학을 중심으로 타원, 쌍곡선, 포물선과 같은 대수 방정식의 해로서 다양한 이차곡선과 이차곡선들의 성질은 오랫동안 수학 교육의 핵심으로 자리 잡아왔다. 그러나 다양한 기하학적 체계를 이해하는 것이 중요하게 강조되면서, 비유클리드 기하학, 즉 구면기하학과 쌍곡기하학의 도입이 점차 확산되고 있다. 이는 예비교사들이 기하학적 사고의 다양성을 경험하고, 학생들에게 보다 폭넓은 수학적 개념을 전달할 수 있도록 준비하는 데 기여하고 있다.

III. 연구방법 및 절차

1. 수업 개발 및 적용

본 연구에서 질적 자료는 수업 자료를 개발하고 13주차 수업(표1) 동안 예비교사들을 지속적으로 관찰하였다. 수업자료는 Greenberg (1993), 박창균(2011), 진선숙(2019), 윤갑진 & 황승수(2020), 김대환 & 강지은(2023) 등을 참고하여 구성되었다.

개발단계		세부절차
분석	문헌연구 및 분석	-비유클리드 기하학과 과련된 수학교과교육에 관련된 국내외 선행연구 분석 - 비유클리드 기하(구면기하학, 쌍곡기하학 등)에 관련된 문헌 조사 및 분석
설계	교수학습 자료 개발	- 새로운 공간을 인지하기 위한 기본적인 개념 - 미적분과 같은 수학도구를 사용하지 않고 논리적 증명 과정을 통한 수학적 개념을 이해 - 유클리드, 비유클리드 기하학에서 삼각형을 통한 공간의 구조 인지
실행	현장적합성 검토	- 개발된 교수학습 자료를 활용한 13차시의 수업을 진행 - 수업 후 검사지로 데이터 수집 - 수업 중 수업관찰과 자기평가, 수업 후 설문 및 면담으로 질적 데이터 수집
	결과분석	-데이터를 통한 결과 분석
	최종개발	-기하학을 이해하기 위한 역사적, 단계별 접근법

이 자료는 수업에 대한 이해 수준, 흥미, 그리고 창의성에 관한 정보를 수집하기 위해 작성되었으며, 자발적이고 심층적인 의견을 얻는 데 중점을 두고 있으며, 이를 토대로 자료를 종합하여 결과를 정리하였다. 수업은 예비교사들의 참여와 상호작용을 중심으로 유클리드 기하학, 중립기하학, 구면기하학, 쌍곡기하학에서 측지삼각형을 주제로 13주간의 수업을 진행하였다(표1). 교수학습 자료와 수업 목표를 이해하기 위해서는 기본적인 수학 지식이 필요하다. 특히, 미적분과 같은 고급 수학 도구를 사용하지 않고 논리적인 증명 과정을 통해 수학적 개념을 이해하는 것이 강조된다. 이러한 접근 방식은 예비 교사들이 수학적 상황에 더 유연하게 대처하고 새로운 아이디어를 도출하는 데 큰 도움이 될 것이다. 논리적 증명 과정을 통해 수학을 학습하면 예비 교사들은 수학의 본질을 깊이 이해하게 되고, 다양한 상황에서 수학적

사고를 적용할 수 있는 능력을 키울 수 있다. 이는 예비교사들이 교실에서 효과적으로 수학을 가르치고, 학생들의 수학적 이해를 돕는 데 중요한 역할을 한다. 논리적 증명은 단순히 문제 해결을 넘어, 수학적 사고와 논리를 체계적으로 발전시키는 데 핵심적인 역할을 한다. 예비 교사들은 이러한 과정을 통해 자신들의 수학적 사고를 강화하고, 학생들에게도 이러한 사고방식을 전수할 수 있다. 미적분을 사용하지 않는 접근 방식은 예비교사들이 수학을 더 친숙하게 느끼게 하고, 수학 교육에 대한 자신감을 높이는 데 기여한다. 미적분은 고등수학의 중요한 부분이지만, 그 복잡성 때문에 예비 교사들이 초기 단계에서 수학에 대해 부정적인 태도를 가지게 할 수 있다. 따라서, 미적분을 배제하고 기초적인 논리와 증명 과정을 중심으로 교육하는 것은 예비 교사들이 수학에 대해 긍정적인 경험을 쌓는 데 도움이 된다. 이러한 접근법은 예비 교사들이 학생들의 관점에서 수학을 바라보고, 학생들이 직면할 수 있는 어려움을 더 잘 이해할 수 있게 한다. 수학 교육의 목적은 단순히 문제를 푸는 기술을 가르치는 것이 아니라, 학생들이 논리적 사고를 통해 문제를 분석하고 해결하는 능력을 키우는 것이며, 논리적 증명을 통한 학습은 이러한 목표를 달성하는 데 있어 중요한 도구가 된다. 또한, 예비 교사들이 수학적 개념을 더 깊이 이해하게 되면, 이를 바탕으로 다양한 교육 방법을 개발하고 적용할 수 있다. 이는 교실에서의 수학 교육의 질을 높이고, 학생들의 학습 경험을 더욱 풍부하게 만들며, 예비 교사들은 이러한 과정을 통해 자신감과 창의성을 키우고, 수학 교육에 대한 열정을 가지게 된다.

본 연구에서는 수업 시연과 피드백 수집을 통해 질적 데이터를 수집하고 분석하였다. 수업 시연은 D대학교 2학년 예비교사 40명을 대상으로 13주 동안 진행되었으며, 각 수업 후 학습자들의 피드백을 설문지와 심층 인터뷰를 통해 수집하였다. 설문지는 개방형 질문을 포함해 학습자의 인식 변화와 수업 내용에 대한 반응을 평가하였고, 심층 인터뷰는 선택된 5명을 대상으로 진행해 학습 과정에서의 심층적 경험을 탐구하였다. 또한, 본 연구에서는 조별활동을 통해 학습자들의 협력적 학습 과정과 기하학적 인식 변화를 분석하였다. 조별활동은 6~7명씩 6개 조로 나누어 비유클리드 기하학 문제 해결 및 토론을 중심으로 진행되었으며, 각 조의 활동은 비디오 녹화를 통해 기록하였다. 조별 토론에서 나오는 학습자 간 상호작용, 문제 해결 전략, 그리고 개념 이해의 발전 과정을 분석하였다. 대화의 흐름, 논의된 주제, 개별 학습자의 기여도 등을 세밀하게 분석하여 조별활동이 기하학적 개념 이해에 미친 영향을 도출하였다. 또한, 각 조별 활동 후 설문과 개별 인터뷰를 통해 조별 학습 경험에 대한 피드백을 수집하고, 이를 정성적 데이터로 분석하여 협력적 학습의 효과성을 평가하고, 수업 시연에 대한 학습자들의 직관적 변화를 체계적으로 분석하였다. 이를 통해 연구 결과의 신뢰성과 타

당성을 높였다.

Ⅳ. 연구결과

1. 수업내용

비유클리드 기하학은 유클리드 기하학과 달리 평행선 공리가 성립하지 않는 기하학 체계를 다룬다. 이는 쌍곡기하학과 타원기하학을 포함하며, 학생들에게 다양한 기하학적 개념과 사고방식을 제공하는 중요한 교육적 가치가 있다. 본 논문은 중등교육과정에서 비유클리드 기하학을 효과적으로 가르치기 위한 수업설계를 제안하고자 한다. 본 수업설계는 첫 째로 예비교사들이 비유클리드 기하학의 기본 개념과 원리를 이해하도록 돕고, 둘째로 유클리드 기하학과 비유클리드 기하학의 차이점을 비교하여 논리적 사고를 발전시키며, 셋째로 비유클리드 기하학의 개념을 다양한 문제 상황에 적용할 수 있도록 하는 것을 목표로 다음의 13주차 수업을 제안하고자 한다.

<표1. 13주차 수업>

강의주제		강의내용
1주	기하학의 역사	- 비유클리드 기하학의 역사적 배경
2주–3주	중립기하학	- 힐베르트 공리계 - 중립기하학에서 다양한 정리 - 평행선공리
4주–6주	유클리드 기하학	- 넓이와 행렬식 - 사인법칙과 코사인법칙 - 유클리드 공간의 움직임(등장사상) - 원뿔곡선
7주	다양한 공간	- 다양한 공간(원뿔, 원기둥, 구면, 쌍곡면 등)에서 측지선의 정의와 측지삼각형
8주–10주	구면기하학	- 구면기하학에서 측지삼각형과 구면등장사상 - 구면기하학에서 측지삼각형의 넓이 - 구면기하학에서 직각삼각형의 피타고라스 정리, - 구면기하학에서 측지삼각형의 사인정리, 코사인정리 - 지도만들기
11주	쌍곡기하학	- 쌍곡기하학의 다양한 모형 - 쌍곡기하학에서 측지삼각형과 쌍곡등장사상

12주 – 13주	- 쌍곡기하학에서 측지삼각형의 넓이 - 쌍곡기하학에서 직각삼각형의 피타고라스 정리, - 사인정리, 코사인정리

1) 1주차: 기하학의 역사

기하학이란 정확히 무엇인가? 이러한 질문을 이미 들어 본 적이 있을 것이다. 이 물음에는 여러 가지 답이 있지만 그중 하나는 기하학을 영어로 ``Geometry"라 하는데 라틴어 ``Geometria"에서 유래했고, ``Geo"는 지구 또는 토지, ``metria"는 측량을 뜻한다. 기하학은 고대 이집트에서 시작된 이래에 현재에 이르기까지 연구 방법 및 대상이 다양하다. 고대 이집트인들은 홍수로 나일 강이 범람한 후 토지를 재분배하기 위해 측량이 필요하였고 이와 같은 토지의 측량에 대한 연구를 기하학의 기원으로 보고 있다. 그렇다면 기하학을 공부한다는 것은 어떤 것일까? 이것 역시 많은 답이 있지만 가장 쉽게 이해하는 방법은 두 점 사이의 거리, 두 직선 사이의 각, 영역의 넓이 계산을 이해하는 것으로 생각할 수 있다. 다양한 기하학에서 삼각형은 점과 선으로 만들 수 있는 가장 기본적인 영역으로 각 기하학의 특성을 이해하는 데 중요한 역할을 한다. 기하학은 방법론적으로 몇 가지의 연구 방법이 있다. 먼저 논증기하학과 해석기하학이 있다. 이 두 가지는 같은 기하학적 대상, 즉 직선, 원, 타원 등을 연구하지만, 관점의 차이가 있다. 논증기하학은 대수적 방법은 사용하지 않고, 공리에서 시작하여 논리적으로 옳고 그른 것을 논증하는 기하학이고, 해석기하학은 기하학적 도형을 좌표계 위에 나타내고 연구하는 기하학이다. 그리고 대수기하학이 있다. 대수기하학(algebraic geometry)은 역사적으로는 해석기하학과 사영기하학이 발전하여 형성된 수학의 한 분야이다. 마지막으로 미분기하학(differential geometry)은 기하학의 문제를 다루기 위해 미적분학, 선형대수학 그리고 다중선형대수학을 이용한 수학의 한 분야이다.

유클리드 기하학(Euclidean geometry)은 고대 그리스의 수학자 유클리드가 구축한 수학 체계로, 그의 저서 “원론”은 기하학에 대한 최초의 체계적인 논의로 널리 알려져 있다. 유클리드의 방법은 직관적으로 받아들여지는 공리를 참으로 간주하고, 이를 바탕으로 연역적으로 명제를 이끌어내는 데 기초한다. 유클리드가 도출한 많은 성과는 이미 오래전 수학자들에게 알려져 있던 것들이었다. 유클리드는 포괄적인 추론과 논리를 통해 그 명제들이 왜 성립할 수 있는가를 보인 최초의 인물이고 그의 “원론”은 평면 기하학과 함께 시작하여 공간 기하학으로 이어진다. 유클리드는 모든 기하학적 용어를 정의하려고 시도하였다. 하지만 한 용어

를 정의하기 위해서 다른 용어를 사용하고 다시 이 용어를 정의 하기위해 또 다른 용어를 사용하게 되는 굴레에서 벗어날 수 없었고, 이러한 정의는 유용하지 못하다는 점에서 다음과 같은 무정의 용어(점, 선, 위에 있다, 사이, 합동)를 사용하기로 하였다. 하지만 유클리드 공리는 어떤 불완전성을 띄게 되고, 이를 보완하여 힐베르트가 무정의 용어를 이용하여 힐베르트 공리군을 통해 유클리드 기하학을 보다 엄밀하게 정의하였다.

2) 3주차: 중립기하학

유클리드 기하학은 고대 그리스의 수학자 유클리드에 의해 구축된 수학 체계로 유클리드의 원론은 기하학에 관한 최초의 체계적인 논의로 알려져 있다. 하지만 유클리드가 정의한 유클리드 공리계에서 논리적 결점이 생긴다. 유클리드 공리계의 불완전성을 보완하기 위해, 다비트 힐베르트는 무정의 용어(점, 직선, 위에 있다, 사이, 합동)를 사용하고 힐베르트 공리계를 통해 유클리드 기하학을 보다 엄밀하게 구성하였다. 힐베르트의 공리계는 결합공리, 순서공리, 분리공리, 합동공리, 아르키메데스 공리, 데데킨트공리, 힐베르트의 평행공리로 구성되어 있으며, 합동공리에는 중등교과과정에서 학습하는 삼각형의 SAS합동이 포함되고, 이를 공리로서 이해한다. 평행공리를 제외한 힐베르트 공리계를 만족하는 기하학을 중립기하학이라 하며, 중립기하학에서는 중고등학생들이 학교 수업시간에 배우는 다양한 기하학적 정리가 만족된다. 특히, 중학교 교육과정에 등장하는 다음의 정리들이 있다.

1. 맞꼭지각은 서로 합동이다.
2. 모든 직각은 합동이다.
3. 엇각정리: 한 횡단선에 의해 잘린 두 직선이 합동인 엇각을 가지면 그 두 직선은 평행하다.
4. 외각정리: 삼각형의 외각은 두 내대각보다 크다.
5. 삼각형의 ASA, SSS 합동정리

엇각정리의 역은 평행선 공리가 되므로 평행선 공리를 가정하지 않은 중립기하학에서는 성립하지 않는다. 또한, 삼각형 내각의 합과 관련된 정리로 사케리-르장드르 정리가 있다:
중립기하학에서 삼각형의 내각의 합은 π보다 작거나 같다. 이때, 유클리드 기하학은 내각의 합이 π도일 때가 된다.
다음의 평행공리에 관한 각 항목이 동치관계가 된다는 것이 알려져 있다.

1. 유클리드 평행공리

   두 직선 l과 m의 횡선 t에 대하여 t의 한 쪽에 만들어지는 두각의 합이 π보다 작으면

직선 l과 m은 같은 쪽에서 만난다.

2. 힐베르트 평행공리

한 직선 l과 l위에 있지 않은 한 점 P에 대하여 P를 지나고 l과 평행한 직선이 많아야 하나 존재한다.

3. 플레이페어의 평행공리

한 직선 l과 l위에 있지 않은 한 점 P에 대하여 P를 지나고 l과 평행한 직선이 유일하게 존재한다.

4. 삼각형 내각의 합은 2직각이다

평행공리가 성립하지 않는 예는 대표적으로 구면기하학과 쌍곡기하학이 있다. 구면기하학은 반지름이 r인 구면위에서 기하학을 생각한다. 구면기하학에서서는 한 직선(대원) l과 직석 밖의 점 P에 대하여 P를 지나고 l과 평행한 직선(대원)은 존재하지 않는다. 쌍곡기하학은 한 직선이 있고 직선 밖의 점에 대해 그 점을 지나고 직선과 평행한 직선이 무수히 많은 기하학이다. 쌍곡기하학은 다양한 형태의 모형(푸앵카레 원판 모형, 푸앵카레 반평면 모형, 클라인 모형 등)로 공부가 가능하다.

3) 4~6주차: 유클리드 기하학

예비교사들은 고등학교와 선형대수학 시간에 행렬과 행렬식에 대해 공부한다. 행렬식은 행렬의 역행렬의 존재 여부를 판별해주는 식이 되며, 행렬에 의한 선형변환에서 넓이의 비율을 알 수 있다. 이 단원에서는 행렬에서 행렬식의 의미를 기하학적으로 이해하고, 그 응용에 대해 알아보고자 한다. 먼저, $\mathbb{R}^2$의 두 벡터 X, Y에 의해 만들어지는 평행사변형의 넓이가 선형성을 가지는 것으로 이 두 벡터를 행으로 가지는 행렬의 행렬식으로 계산된다는 것을 유도한다. 이를 이용하여 고등학교 과정에서 유클리드 평면 $\mathbb{R}^2$에서 세 점 (a_1,b_1), (a_2,b_2), (a_3,b_3)로 만들어지는 삼각형의 넓이 $\triangle$는 다음과 같이 얻는다.

$$\triangle = \frac{1}{2}((a_2b_3 - a_3b_2) - (a_2b_1 - a_1b_2) - (a_1b_3 - a_3b_1))$$

예비교사들은 고등과정에서 학습한 삼각형 $\triangle ABC$가 있을 때 다음의 사인법칙과 코사인 법칙을 유도해본다.

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C)$$

특히, 코사인법칙은 $\angle C$가 수직인 직각삼각형에 대하여 피타고라스 정리 $c^2 = a^2 + b^2$과 비교하여 삼각형이 직각삼각형과 얼마나 차이가 나는지 이해할 수 있다.

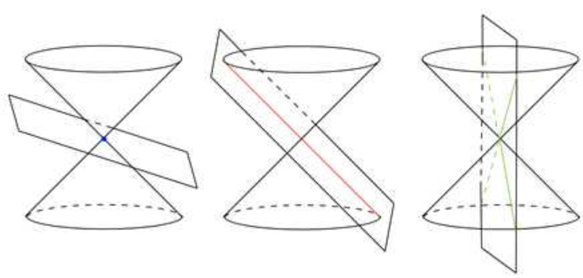
예비교사들은 초•중학교 과정에서 합동을 학습한다. 합동이란 두 도형에 대하여 한 도형을 옮겨 다른 하나에 포개어질 때, 두 도형이 합동이라고 한다. 이와 같은 합동을 조금 더 명확하게 정의해보면 다음과 같다, 한 도형에 대하여 유클리드 평면에서 등장사상의 상이 다른 하나와 같다면 두 도형은 합동이다. 여기에서 등장사상의 정의는 다음과 같다.

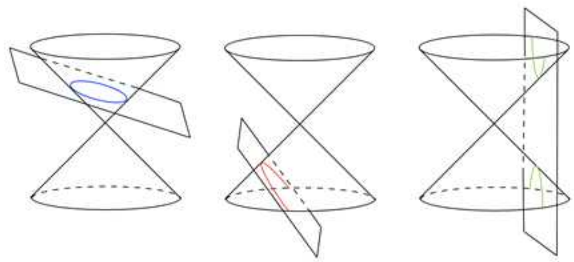
유클리드 공간 $\mathbb{R}^2$에서 일대일 대응사상 $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$가 임의의 두 점 P, Q에 대하여 $d(P,Q) = d(f(P), f(Q))$를 만족시킬 때, f를 등장사상(isometry)라고 한다.

등장사상에 예로는 평행이동, 회전이동, 대칭이동 등이 있다. 세 가지 예에 대하여 등장사상으로서 명확히 정의해 보고 다양한 성질들을 이해한다. 특히, 모든 평행이동과 회전이동은 대칭이동의 합성으로 표현된다는 것을 알 수 있으며 나아가 다음의 세 반사 정리를 학습한다.

평면의 임의의 등장사상은 최대 세 직선에 대한 대칭이동의 합성으로 나타낼 수 있다.

거리에 대한 이해를 높이기 위해 예비교사들에게 거리를 이용하여 원뿔곡선(이차곡선)을 이해해보자. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 서로 수직이 아니게 만나는 두 직선 l과 m에 대해 m을 축으로 하여 l을 회전시키면 직원뿔(right circular cone)을 얻는다. 만약 서로 수직이라면 평면을 얻는다. 이때, m을 원뿔의 모선(generator), 직선 l을 원뿔의 축(axis), l과 m이 만나는 점 V를 원뿔의 꼭짓점(vertex), l과 m 사이의 각 θ를 반꼭지각 (2θ를 꼭지각)이라 한다. 원뿔 K와 평면 Π의 교선 $C = K \cap \Pi$를 원뿔곡선(conic section: 이차곡선)이라 하며, l과 Π 사이의 각을 φ라 한다. 이차곡선은 Π의 위치와 φ의 크기에 따라 나눌 수 있다.

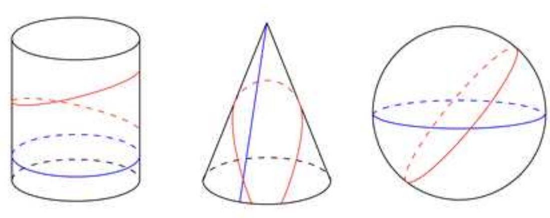




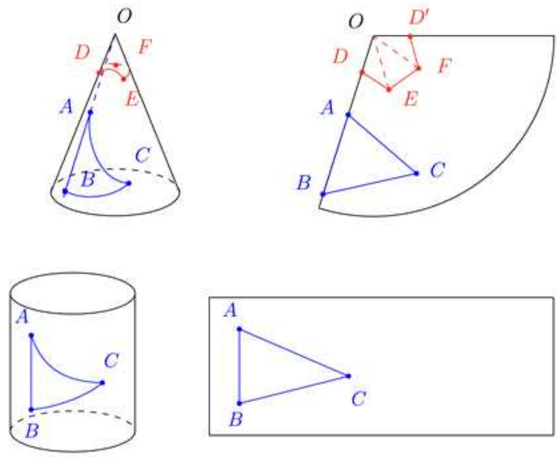
이러한 원뿔곡선의 정의로부터 고등학교에서 배운 원뿔곡선의 정의를 유도하여 기하학적 정의와 대수적 정의 사이의 관계를 이해한다.

4) 7주차: 다양한 공간에서 측지선

다양한 공간에서 측지선은 기하학과 물리학에서 중요한 역할을 하는 개념으로, 다양한 공간의 특성과 구조를 이해하는 데 필수적이다. 공간 내의 두 점 사이의 최단 경로는 측지선(geodesic)의 일부가 되며, 이는 평면, 구면, 쌍곡면 등 다양한 공간에서 다르게 나타난다. 두 점 사이의 최단경로를 먼저 생각해보자. 유클리드 기하학에서는 두 점을 지나는 직선의 일부, 즉 선분이 되며, 구면기하학에서는 구면 위의 두 점과 구의 중심을 지나는 평면과 구면 사이의 교선에서 짧은 부분이 되며, 푸앵카레 원판 모형에서 두 점을 지나는 원 중 푸앵카레 원판의 경계에서 수직으로 만나는 원이 있고 이 원의 일부가 최단거리를 만드는 측지선이 된다. 다음과 같은 다양한 공간(원기둥, 원뿔 등)에서 측지선을 생각해보자.



기하학적 공간에서 세변이 모두 측지선으로 이루어진 삼각형을 측지삼각형(geodesic triangle)이라한다. 특이한 예로 원뿔에서 측지삼각형을 생각해보자. 다음과 같은 꼭짓점 O가 포함된 원뿔을 한 기하학적 공간이라 하고 그 위의 측지삼각형은 다음과 같다.

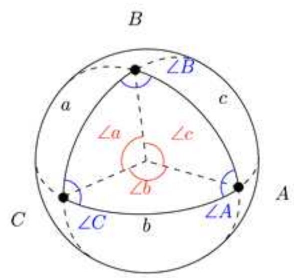


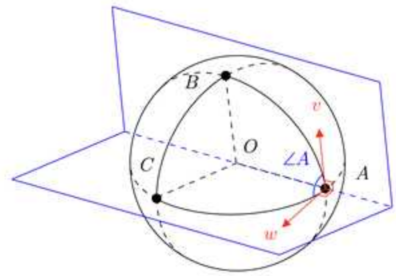
원기둥과 원뿔의 경우는 위와 같이 생각할 수 있다. 원기둥과 원뿔의 경우 전개도를 통해 삼각형의 모양을 이해할 수 있고, 평면과 같이 내각의 합이 2직각이 된다. 특히, 원뿔에서 측지삼각형은 두 가지 형태가 있는데, 하나는 원뿔의 꼭지점을 포함하고 다른 하나는 원뿔의 꼭지점을 포함하지 않는 측지삼각형이다. 만약 원뿔에서 꼭지점을 제외하고 공간을 생각한다면 $\triangle DEF$와 같은 삼각형은 생각할 수 없다.

평면에서는 직선이 가장 짧은 거리지만, 곡면이나 비유클리드 공간에서는 측지선이 그 역할을 한다. 이러한 개념을 통해 학생들은 평면과 다양한 공간에서의 기하학적 구조를 비교하고 대조할 수 있다. 측지삼각형에서 공간에 따라 내각의 합이 180도를 넘거나 모자랄 수 있음을 시각적으로 확인한다.

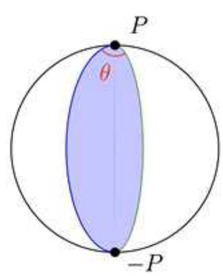
5) 8, 9, 10주차: 구면기하학에서 삼각형

구면기하학은 2차원 구면 위에서 정의되는 비유클리드 기하학이고, 한 직선과 직선 밖의 점에 대해 그 점을 지나고 직선과 평행한 직선이 존재하지 않는다. 기하학적 모형으로 중립기하학인 쌍곡기하학을 학습하는 것은 3차원 유클리드 공간에서 쉽게 이해할 수 있는 구면기하학을 학습하는 것보다 더욱 추상적이고 이해하기 어려울 수 있으므로 4, 5주차에 구면기하학을 학습한다. 구면기하학의 학습을 위해 구면에서 측지삼각형이 있을 때, 꼭지점, 변, 반지름의 길이, 꼭지각, 중심각 등을 기호로 표현한다. 특히, 측지삼각형의 꼭지점에서 꼭지각은 그 꼭지각을 이루는 측지선 사이의 각도를 말한다.





위 그림과 같이 구위의 측지삼각형을 살펴보면 내각의 합이 2직각 이상인 것을 알 수 있다. 구면 위의 측지삼각형의 넓이를 계산하기 위해서 먼저 반달영역(luna)의 넓이를 학습한다. 반달영역이란 구면 위의 두 대원이 점 P에서 만나고 그 각의 크기가 θ라 하면 두 대원에 의해 꼭지점 $P, -P$를 가지고 그 사잇각이 θ가 되는 두 개의 영역이 만들어진다.



이때 반달영역의 크기는 다음과 같다.

$$(\text{반달영역}) = \frac{\theta}{2\pi} \cdot 4\pi = 2\theta$$

또한, 원점대칭사상(대척사상) $f: \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$은 $f(p) = -p$로 정의되는 구면 위의 등장사상임을 학습한다. 반달영역의 넓이와 원점대칭사상을 이용하여 구면 위의 측지삼각형의 넓이를 다음과 같이 학습한다.

$$(\triangle ABC\text{의 넓이}) = \angle A + \angle B + \angle C - \pi$$

사케리-르장드르의 정리에 의하면 구면기하학은 삼각형의 내각의 합이 2직각보다 크므로 중립기하학이 아님을 알 수 있다. 구면 위의 측지삼각형의 넓이를 학습함으로써 학생들은 구면기하학의 독특한 특성을 이해할 수 있으며, 유클리드 기하학과의 차이점을 명확히 인식할 수 있다.

6) 11, 12, 13, 14주차: 쌍곡기하학에서 삼각형

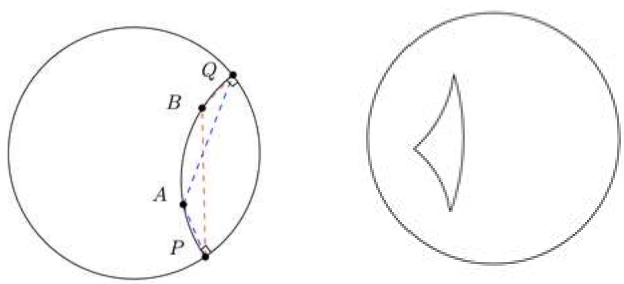
쌍곡기하학은 비유클리드 기하학의 하나로서 중립 기하학의 모든 공리를 그대로 인정하고

평행선의 공리만을 부정한 공리를 받아들인 기하학이다. 쌍곡기하학이 중립기하학의 한 예이기 때문에 쌍곡기하학에서 삼각형의 내각의 합은 2직각보다 항상 작다(사케리-르장드르 정리). 쌍곡기하학을 표현하는 대표적인 모형으로는 푸앵카레 원판 모형, 푸앵카레 반평면 모형, 쌍곡면 모형, 클라인 모형 등이 있지만 가장 직관적으로 이해하기 쉬운 푸앵카레 원판 모형을 학습한다. 푸앵카레 원판 모형은 다음과 같은 집합 $\mathbb{D}$에서 생각하며, 푸앵카레 직선은 $\mathbb{D}$의 경계에서 수직으로 만나는 원에 대하여 $\mathbb{D}$에 속한 부분(개호) 또는 중심을 지나는 현으로 정의된다.

$$\mathbb{D} = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

푸앵카레 원판 모형에서 두 점 A, B 사이의 거리는 다음과 같이 계산된다. 이때, AP, BP, BQ, AQ는 유클리드 거리이다.

$$d_H(A,B) = \left| \ln\left(\frac{AP}{BP} \frac{BQ}{AQ} \right) \right|$$



푸앵카레 원판 모형에서 등장사상으로 반전사상을 생각할 수 있다. 중심이 O이고 원 γ에 대하여 점 P의 반전인 P'는 $OP \cdot OP' = r^2$을 만족하는 반직선 $\overrightarrow{OP}$위의 유일한 점이다. 푸앵카레 원판과 직교하는 원 γ가 있다고 할 때, γ에 대한 반전에 대하여 푸앵카레 직선을 푸앵카레 직선으로 사상하며, 푸앵카레 길이를 보존한다. 즉, 푸앵카레 원판 모형에서 등장사상이 된다. 푸앵카레 원판 모형에서 측지삼각형은 반전사상에 의해 측지삼각형의 한 점을 푸앵카레 원판의 중심으로 옮길 수 있고, 이를 통해 측지삼각형 내각의 합이 2직각보다 작다는 것을 얻는다. 또한, 쌍곡기하학에서 측지삼각형의 넓이가 다음과 같은 관계식과

$$(\triangle ABC\text{의 넓이}) = \pi - \angle A + \angle B + \angle C$$

측지삼각형의 사인법칙, 코사인법칙, 직각삼각형에 대한 피타고라스 정리 등을 소개한다.

2. 수업적용결과

비유클리드 공간을 통한 기하학적 인지 변화를 목표로 한 수업은 학생들에게 다양한 반응

을 이끌어낼 수 있었다. 수업 초반, 많은 학생들은 기존의 유클리드 기하학에서 벗어난 새로운 공간 개념에 당혹감을 느꼈다. 익숙했던 평면 기하학적 법칙들이 비유클리드 공간에서는 더 이상 적용되지 않는다는 점에서 혼란을 겪는 경우가 많았다. 특히 직관적으로 받아들이기 어려운 쌍곡 기하학의 곡선이나 구면 기하학의 평행선 개념은 학생들에게 생소하고, 때로는 비현실적으로 느꼈다. 수업이 진행됨에 따라 학생들은 점차 이러한 새로운 기하학적 개념에 적응하기 시작했다. 수업 설계는 학생들이 비유클리드 공간에서의 사고방식을 체계적으로 배울 수 있도록 구조화되었고, 다양한 시각적 자료와 상호작용적인 활동들이 이를 도왔다. 예를 들어, 쌍곡기하학의 모델을 이해하는 데 도움이 되는 푸앵카레 원판 모델을 활용하거나, 구면기하학을 직관적으로 접근할 수 있도록 지구본이나 컴퓨터를 이용한 다양한 지도, GeoGebra를 사용하는 등 학생들이 개념을 보다 실감 나게 경험할 수 있도록 하였다. 이러한 과정에서 학생들은 기존의 인지적 틀을 확장하는 경험을 했다. 일부 학생들은 비유클리드 공간을 사고하는 과정에서 지적인 도전감을 느꼈으며, 이는 창의적인 문제 해결 능력으로 이어졌다. 또한, 비유클리드 공간의 특성을 현실 세계의 다양한 문제와 연결 지으려는 시도는 매우 긍정적으로 평가되었다. 예를 들어, 우주의 구조나 GPS 시스템에서 비유클리드 기하학이 실제로 어떻게 적용되는지를 탐구하며, 학생들은 이론적 개념과 현실의 문제 사이의 연관성을 발견하고 흥미를 느꼈다. 일부 학생들은 이러한 새로운 사고방식에 적응하는 데 여전히 어려움을 느꼈다. 유클리드 공간의 직관에 깊이 익숙해져 있던 학생들은 비유클리드 기하학에서의 논리적 전개나 추상적 개념을 이해하는 데 시간이 걸렸고, 이는 때때로 학습 과정에서 좌절감을 느끼게 하기도 했다. 이론을 현실에 적용하는 활동이 아닌 순수 수학적 사고를 요하는 문제에서는 어려움을 겪는 경향이 있었다. 그럼에도 불구하고, 학생들 대다수는 이 수업이 새로운 시각을 열어주었다고 평가했다. 단순히 유클리드 기하학에서 벗어난 기하학적 체계를 학습하는 것을 넘어서, 다른 방식으로 문제를 사고하고 접근하는 능력이 길러졌다는 점에서 의미가 있다고 느꼈다. 학생들은 비유클리드 기하학이 단순히 학문적 지식을 쌓는 것이 아니라, 실생활의 복잡한 문제를 해결하는 데 유용한 도구가 될 수 있다는 점에서 긍정적인 학습 경험을 했다.

Ⅳ. 결론 및 제언

본 논문은 예비교사 교육에서 비유클리드 기하학을 학습함으로써 기하학적 인식의 변화를 탐구하고, 이를 통해 교사로서의 역량을 강화하는 데 중점을 둔다. 기하학은 유클리드, 가우

스, 푸앵카레 등 수학자들의 다양한 접근과 시각을 통해 발전해온 분야로, 이를 학습함으로써 예비교사들은 수학에 대한 고정된 선입관에서 벗어나 새로운 수학적 사고를 받아들일 수 있다. 본 연구에서는 D대학교 2학년 학생들을 대상으로 한 13주차 수업을 통해 구면기하학과 쌍곡기하학의 삼각형 넓이를 학습하고, 그 과정에서 학생들의 기하학적 인지 변화를 분석하였다. 특히, 가우스-보네 정리를 바탕으로 곡률이 삼각형 넓이에 미치는 영향을 심화 학습하여 예비교사들이 비유클리드 기하학에서의 기하학적 구조를 직관적으로 이해하는 데 도움을 주었다.

이러한 학습 과정은 예비교사들이 다양한 기하학적 공간에서 거리를 측정하고, 삼각형의 형태 변화를 관찰하며 새로운 방식의 문제 해결 능력을 기르는 데 크게 기여한다. 이를 통해 예비교사들은 유클리드 기하학에서 벗어나 구면 및 쌍곡 기하학의 개념을 체화하고, 더 나아가 기하학적 개념과 추론력을 심화시키게 된다. 이러한 경험은 교사로서의 창의적이고 유연한 교수법 개발로 이어져, 교육 현장에서 학생들에게 깊이 있는 학습을 제공하고 다양한 시각에서 문제 해결을 도울 수 있는 역량을 강화한다. 궁극적으로, 예비교사들이 비유클리드 기하학을 학습하고 이를 수업에 적용함으로써 교육의 질이 높아지며, 학생들의 학업 성취도 향상과 교사로서의 전문성 증대에 긍정적인 영향을 미칠 것으로 기대된다.

본 연구에서 탐구한 비유클리드 기하학을 통한 예비교사들의 기하학적 인식 변화는 수학교육에 있어 중요한 시사점을 제공하였으나, 몇 가지 한계점이 존재한다. 이를 보완하기 위해 후속 연구에서는 다음과 같은 제언을 하고자 한다. 첫째, 연구 대상을 확대하여 다양한 학년과 교육 배경을 가진 학생들을 대상으로 기하학적 인식 변화와 교육적 효과를 비교 분석할 필요가 있다. 이를 통해 비유클리드 기하학이 각 학습 단계에서 어떤 영향을 미치는지 더 정교하게 파악할 수 있을 것이다. 둘째, 구면기하학과 쌍곡기하학 이외의 다른 비유클리드 기하학적 개념들, 예를 들어 미분기하학이나 복소기하학 등의 보다 심화된 주제를 다루는 연구가 필요하다. 이를 통해 예비교사들이 다양한 기하학적 체계를 종합적으로 이해하고, 교육 현장에서 보다 폭넓게 적용할 수 있는 역량을 기를 수 있을 것이다. 셋째, 예비교사들의 수업 설계 능력 및 실제 교육 현장에서의 적용성을 평가하는 연구가 필요하다. 이를 통해 이론적 학습이 실제 교육 상황에서 어떻게 반영되고 있는지를 분석하고, 수업 효과성을 높이기 위한 실질적인 교수법 개선 방향을 제시할 수 있을 것이다. 마지막으로, 비유클리드 기하학 학습이 교사의 문제 해결 능력과 창의적 사고력에 미치는 장기적인 영향을 분석하는 연구도 필요하다. 이를 통해 예비교사들이 학습한 내용이 교사로서의 전문성 발전에 얼마나 지속적으로 기여하는지 규명할 수 있을 것이다.

참고문헌

강지은 & 김대환 (2023). 비유클리드 기하학에서 이차곡선의 이해를 통한 예비교사교육, 과학교육연구지, 47(3), 263-272.

교육부 (2022). 2022 개정 교육과정. 교육부 고시 제 2022-33호 [별책 8]. 국가교육과정정보센터 홈페이지, http://ncic.re.kr/

김지현 & 김상미. (2022). 수학과 교육과정과 교과서에 제시된 '삼각형의 세 각의 크기의 합, 교육연구, 85, 49-69.

박창균. (2011). 로바체프스키의 수학철학과 비유클리드기하. 한국수학사학회지, 24(4), 21-31.

임재훈. (2009). 삼각형의 내각의 합 : 180°, 2직각, 평각, 불변성, 과학교육총론, 22(1), 23-36.

윤갑진 & 황승수. (2020). 기하학개론, 경문사.

진선숙. (2019). 기하학 예비교사교육 연구 - 수학에 대한 인식변화를 위한 수업개발 및 적용 교육논총, 56(4), 166-182.

홍갑주 & 송명선. (2013). 초등학교 수학에서 삼각형 내각의 합과 평행선의 성질의 연계성, 한국수학교육학회, 16(2), 183-192.

홍원표, 이광우 & 임유나. (2022). 2022 개정 고등학교 교육과정의 남은 쟁점과 과제: 교육과정 담당 교원들의 의견을 중심으로. 교육과정연구, 40(1), 157-183.

Greenberg, M. J. (1993). Euclidean and non-Euclidean geometries: Development and history, Macmillan.

Hollebrands, K. F., Conner, A., & Smith, R. C. (2010). The nature of arguments provided by college geometry students with access to technology while solving problems. Journal for Research in Mathematics Education, 41(4), 324-350.

Kinach, B. M. (2012). Fostering spatial vs. metric understanding in geometry. The Mathematics Teacher, 105(7), 534-540.

Krause, E. F. (1973). Taxicab geometry. The Mathematics Teacher, 66(8), 695-706.

Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. Educational Studies in Mathematics, 27(3), 249-266.

Preservice Teacher Education Through the Study of Geodesic Triangles in Geometric Spaces

Kim, Daehwan

<Abstract>

This paper aims to explore effective lectures designs for teaching non-Euclidean geometry to pre-service teachers. Non-Euclidean geometry extends the concepts of Euclidean geometry, allowing students to experience the expansion of mathematical thinking. The study focuses on hyperbolic and elliptic geometry within non-Euclidean geometry, and it develops educational methods and materials to support student understanding. Research methods included literature review and feedback collection through lecture demonstrations. The findings confirm that using visual tools and hands-on activities enhances students′ comprehension and improves accessibility to abstract concepts. Additionally, the approach of comparing non-Euclidean geometry with Euclidean geometry was found to be effective in strengthening students′ logical reasoning and problem-solving skills. This paper provides practical lecture design guidelines to help teachers teach non-Euclidean geometry more clearly and engagingly.

교사 양성 대학에서의 기초해석학의 학습과 지도방안

황진수*

요 약

기초해석학은 현재 사범대학 학생들의 수학적 배경지식의 함양은 물론이고 현장교육과 직간접적으로 연계된 중요한 전공이다. 대부분 학생이 미분적분학 등 선수전공에서 직관과 공식에 의존한 단순문제 풀이에 길이 들여져 있어 해석학적 문제해결에 어려움을 많이 느끼고 있고 단원별 상호 연계성의 파악이나 문제해결 아이디어의 발현 등에 익숙지 못한 경우가 허다하다. 이번 기초해석학에서 크게 실수계와 수열의 수렴성 부분 그리고 함수의 극한과 연속의 부분 둘로 나누어서 학생들이 기초해석학을 학습하는 데 도움이 될 수학적 마인드맵의 구성과 강의 중에 파악된 학습상의 유의점을 본 논문에서 요약하였다. 본문에서 살펴볼 내용은 학생들의 학습 능력의 향상에 도움이 될 것이고 나아가 직접적으로 연계된 현장 교육의 교수법 역량배양에도 기여할 것이다.

핵심어: 기초해석학, 실수계, 해석학적 문제해결

* 대구대학교 사범대학 수학교육과 교수

I. 서론

교사가 현장에서 학생들을 지도하기 위하여 많은 수학적 전공지식이 필요하다는 것은 매우 상식적이고 잘 알려진 사실이다. (Baumert et al., 2010; Cho, 2011; Dreher et al. 2018). Klein(1932)에 따르면, 교사의 지식은 학생들의 지식과 비교해서 매우 크고 넓어야 하며 학생들이 학습에서 만날 수 있는 많은 난관과 어려움, 그리고 오해를 극복할 수 있도록 지도할 수 있어야 한다고 밝혔다. 교사의 전문성과 관련된 대표적인 연구로서, 교사에게 필요한 지식의 차원을 내용 지식(content knowledge), 교수학적 내용 지식(pedagogical content knowledge), 일반 교수학적 지식(generic pedagogical knowledge) 등의 세 가지 차원으로 범주화하여 제시한 Shulman(1986)의 연구에서도 내용 지식의 중요성은 다음과 같이 강조된다. 교사는 무엇인가가 그렇다는 것을 이해하는 것에만 그쳐서는 안 된다. 교사는 나아가 그것이 왜 그런 것인지, 어떤 근거로 그 정당성을 주장할 수 있으며, 어떤 상황에서 그러한 정당화에 대한 우리의 신념이 약화하거나 거부될 수 있는지를 이해해야 한다(p. 9)고 밝혔다.

여러 연구자들(Ball et al., 2001; Baumert et al., 2010; Even, 2011; Hill et al., 2005)은 수학적 내용에 대해 지식이 풍부한 교사 수업의 질이 높다고 보고했다. 이는 단순한 교수학적 기술만으로는 현장 수업에 한계가 있으며, 교사의 수학적 전문지식의 습득이 결국엔 교수학적 방법론에 못지않은 매우 중요한 현장 수업의 구성요건임을 말하고 있다. 하지만 여러 선행연구들(Lee & Kim, 2016; Yang & Lee 2019; Zazkis & Leikin, 2010)에 따르면 수학 교사들이 대학에서 습득한 전공지식을 현장 교육에 적용하는 데에는 어려움이 따르는 경우가 많음을 지적하였다. 특히 Kang et al..(2011)의 연구에서 우리나라의 수학 교사들은 질 높은 수업을 위하여 교과 내용학 지식의 습득이 필요하고 그 중요성 또한 강조하고 있다는 점은 인정하면서도 교과 내용학 지식의 현장에서의 적용에 대해서는 소극적이다고 지적하였다. 이와 같은 학문 수학과 학교 수학 사이의 괴리는 Klein(1932)이 지적한 '이중 단절'의 문제와 관련하여 많은 주목을 받아왔다. 여기서 이중 단절이란 수학 교사는 대학에서 학문 수학을 처음 접하게 되면서 첫 번째 단절을 경험하고, 현직 수학 교사가 되었을 때 다시 학문 수학과 거리가 있는 학교 수학을 가르치면서 두 번째 단절을 경험하게 된다는 것이다(Lee & Kim, 2016; Park, 2009). 따라서 대학에서 배우는 학문 수학과 학교 현장의 학교 수학이 상호 정, 반, 합에 이르는 변증법적 관계에서 상호 보완하고 발전해나가는 방안을 모색해야 할 것이다.

본 논문에서는 현재 현장 교육과정 기준 미분적분학 I, II는 물론이고 다양한 함수의 구성과 그 이해에 기반한 기초수학, 기하학 등 중고등학교 수학의 이해와 지도에 매우 중요한 개념과 배경 지식을 담고 있는 교원양성 대학의 교육과정 중 기초해석학의 학습과 현장교육 간의 연계성을 논하고 흔히 사범대 수학교육과 학생들이 빠지기 쉬운 오류나 해석학의 학습에서의 유의사항 그리고 오개념 등을 극복하는 방법에 대해서 논하고자 한다. 이에 관한 선행연구로서 Lee(2003)는 해석학 강좌의 운영에서 유의해야 할 강좌의 구성적 측면과 해석학과 연계한 현장교육 과정의 소고, 그리고 해석학과 관련된 응용문제의 해결방법론 등을 구체적인 사례 중심으로 논하였다. 그러나 교원양성대학의 예비교사를 위한 현장교육의 방법론이나 제언 등은 지금껏 잘 다루어지지 못했던 주제이다. 이는 여러 가지의 이유가 있겠지만 기초해석학 강좌와 같은 전공강좌는 교원양성대학의 예비교사를 대상으로 하는 전문성이 필요한 강좌이기에 일반화된 교육의 방법론보다는 특정 교재와 그에 따른 교수법이 많이 좌우되는 부분이라고 널리 인식되기 때문일 것이다 (Oh, 2020). 앞서 밝힌 대로 기초해석학의 학습과 그 이해는 예비교사가 장차 중등학교 현장 교과의 폭넓고 실다운 교육을 위해 필요한 많은 정성적 요소를 담고 있는 전공이고 그 무엇보다도 아래에서 밝힐 전공 이해의 마인드맵을 적절히 활용함으로써 매우 효율적인 전공 학습이 가능하다. 즉 학교 수학의 상위에 있는 해석학의 명확한 이해와 스키마의 형성은 사범대 수학교육과 학생들에게 해석학에서 추구하는 수학적 마인드의 형성에 도움이 될 뿐만 아니라 나아가 학교 현장에서 학생들을 지도하는 데 있어서 넓은 수학적 식견을 갖추게 하고 다양한 학생들의 요구사항과 수준별 학습에 필요한 창의적인 교수법을 개발, 발휘할 수 있는 능력을 배양하는 데 도움이 되리라 믿는다.

II. 본론

1. 해석학의 개요

해석학이란 실수 계(real number system)상의 실해석학(real analysis)과 복소수계(complex number system)상의 복소해석학(complex analysis)으로 크게 구분할 수 있고 본 논문에서는 실수계상의 (실)해석학을 의미한다. 해석학 분야는 수학의 기초영역 중 하나의 연구 분야로 18세기까지 Newton, Leibniz, Bernoulli, Euler 등 많은 수학 또는 물리학자들에 의해 정립된 미분적분학의 저명한 정리나 공식 등의 이해를 뒷받침하는 연구 분야라고 할 수 있다. 즉, 위에 나열한 위대한 학자들과 그들의 계승자들에 의해 연구되고 계산된 공식들이나 정리의

통찰을 위하여 19세기 Bolzano, Cauchy, Weierstrass 등에 의하여 활발히 연구되고 어느 정도 정립된 수학의 학문 분야다. 해석학의 엄밀성의 문제에 대해서는 19세기 초부터 Bolzano, D′ Alembert, Cauchy 등에 의하여 많이 제기되고 그 대부분이 사실 Cauchy에 의하여 해결되었다고 보고 있다. 그는 현재 널리 사용 중인 미분적분학의 기본개념인 극한, 연속, 도함수, 적분 등의 정의부터 그 이론체계를 세우는 데 공헌했지만 사실 해석학의 궁극적인 엄밀성을 추구하는 관점에서는 여전히 미흡했던 부분이 많았다고 알려져 있다. 예를 들면 평등연속이나 평등 수렴의 뜻과 그 필요성에 대해서 인지하지 못했고 미분 가능 함수와 연속함수를 혼동한다든지 해석학 이론의 전개에서 실수의 성질을 등한시한 점 등이다. 이러한 점들은 19세기 중엽 K. Weierstrass에 이르러 많은 점이 보완되고 해결되었으며 현재 교육 과정상 Weierstrass를 해석학의 아버지라고 일컫을 정도로 그의 결과나 증명방식을 많이 따르고 있다고 봐야 할 것이다.

2. 해석학 학습의 특징

현재 각 교원양성 대학교의 수학교육과 학생들 대부분은 해석학 강좌를 2학년이 되었을 때 꼭 수강해야 한다. 그런데 해석학은 무한개념을 바탕으로 극한과정(limit process)을 다루는 경우가 많고 이를 강의 중에 학생들에게 전달하고 이해시키는 과정은 생각처럼 쉬운 것은 아니다. 왜냐면, 무한이라는 개념 자체가 학생들이 그들의 직관에 따라 구성해야 하는 순수한 구성개념(pure construction)인데다가 Fishbein et. al.,(1979)에 의해서 논의되었듯이 무한개념의 획득은 교수법의 영향을 받지 않을 수 있기 때문이다. 그리고 무한개념형성의 질적인 구분이나 그와 관련한 결과들은 다음 Cornu(1981), Robert(1982), Sierpinski(1985) 등의 연구를 참고할 수 있다. 이렇듯 해석학 강좌는 학생들의 관심과 지적 호기심이 먼저 요구되고 주입식 입시교육에 물들어있는 학생들에게 자기 주도적 문제해결 능력도 요구하고 있다는 특징이 있다. 그리고 많은 학생이 해석학에서 추구하는 도구적 논법, 예를 들면 $\epsilon - N$ 혹은 $\epsilon - \delta$논법의 이해와 적용 등 수열과 함수의 극한 그리고 연속의 본질적 개념의 이해와 활용에도 어려움을 많이 느끼고 있다. 이는 선수과목인 미분적분학에서 직관적이고 수치상으로 다룬 사실을 형식적이고 추상화된 해석학적 표현과 복잡한 명제에 기반한 증명으로 승화한 학습에 많은 난관을 느끼기 때문으로 보인다. 아래의 설문과 학생들의 답변은 위의 사실을 바로 보여준다. 아래의 설문은 2024년 5월 첫째 주 동안 경북 소재 4년제 사범대학 수학교육과 2학년에 재학 중인 학생 중 미분적분학 등 선수전공을 이수하고 기초 해석학을 수강

중인 약 30명의 학생들을 대상으로 해석학의 이해와 학습법에 대한 설문조사를 자유기고 형식으로 실시하였고 그중에서 발췌한 것이다.

1) 고등학교 현장에서 접했던 수열과 해석학에서 느꼈던 수열의 차이점을 서술하세요.

“ 고등학교 현장에서 접했던 수열은 단순한 규칙성 위주였습니다. 예를 들어 2, 4, 6, 8처럼 첫 항부터 네 번째 항까지만 보면 규칙성을 파악할 수 있었습니다. 몇 배가 되는지, 몇이 더해지는지 등 사칙연산을 통해 수열의 규칙성을 파악하고 등차수열 등비수열의 공식을 배웠습니다. 하지만 해석학에선 수열값이 불 규칙적인 것이 많았고 예를 들어 f(n+2)=2f(9n+1)+f(n)과 같은 형태로 직관적인 규칙성이 아닌 수학적 귀납법을 통해 증가 수열인지 감소수열인지를 파악하고 유계라는 수열인지 아닌지를 해석하는 위주로 수열들을 배웠습니다. 해석학에선 수열을 표현하는 방법도 다양해졌고 입실론을 이용하여 해석하는 방법과 수열의 수렴이론도 많아졌다고 느꼈습니다 ”

2) 교사로서 현장 수업의 기회가 주어진다면 수열 부분을 잘 강의하기 위하여 현재 해석학의 수열 분야에서 첨가 혹은 삭제될 부분에 대해서 간단히 서술하세요.

“ 해석학 수업을 들으며 수학적 귀납법이 수열을 파악하기에 좋은 방법의 하나라는 것을 깨닫게 되었고 모든 수열을 수학적 귀납법으로 풀 필요는 없지만, 수학적 귀납법을 사용할 줄 아는 능력은 꼭 필요하다고 느꼈습니다. 그래서 교사로서 현장 수업의 기회가 주어진다면 수학적 귀납법으로 수열을 해석하는 방법을 알려주며 강조하고 싶습니다. 그리고 욕심일 수도 있지만, 유계와 단조수열을 통한 단조 수렴 정리 부분을 첨가해야 한다고 생각합니다. 왜냐하면, 고등학교에선 수렴하는지 발산하는지에만 관심을 가졌고 수열을 이해하는 과정이 필요가 없다고 느껴져서 유계와 단조수열을 배우면서 수열을 해석하는 방법까지는 알면 좋겠다고 생각했습니다. 또 해석학에선 수열을 표현하는 과정에서 집합을 이용한 표현, 함수를 이용한 표현 등 다양한 표현법을 사용하는데 고등학교에서도 다양하게 표현하는 법을 첨가했으면 좋겠다고 생각합니다 ”

3) 현재 학생들(학창 시절 포함)이 수열 분야를 어려워하는 구체적인 이유가 있다면 자유 형식으로 서술하세요.

“현재 학생들은 직관적인 규칙성은 잘 파악하지만, 수열이 조금만 불규칙해지거나 규칙성이 없다면 어떻게 푸는지 감을 잡지 못합니다. 이것 역시 수열을 해석하기보단 극한값에만 관심을 가지기 때문이라고 생각합니다. 학생들은 수열을 배운 뒤에 수학적 귀납법을 뒤늦게 배우게 되면서 수열을 수학적 귀납법으로 해석하는 것에 대한 중요성을 느끼지 못하는 것도 수열 분야를 어려워하는 이유라고 생각합니다. 따라서 다양한 수열들을 해석해 보는 과정을 공부하면서 극한값에만 관심을 가지는 것이 아니라 수열 자체에 관심을 가지도록 하는 것이 중요하다고 생각합니다”

3. 주별 기초해석학의 학습 내용과 유의점

먼저 기초해석학은 주로 2학년 1학기에 개설되는 전공으로 선수과목으로 미분적분학 I, II와 수리논리를 포함한 집합론을 수강했다는 전제하에 수업이 진행되는 것이 일반적이다. 따라서 학생들이 다항식, 지수-로그함수, 삼각함수, 쌍곡형 함수와 그들의 역함수 등 기본함수의 이해를 전제하고 단사, 전사, 그리고 전 단사 등 함수의 분류 또한 이해한다는 전제하에 수업이 진행된다. 그리고 해석학의 이론적 학습과 장차 예비교사로서의 수학적 지식의 함양, 그리고 학생들이 임용고사 준비에 용이하다고 알려진 적절한 교재를 선택하는 것이 중요하다고 판단되는데, 저자는 Introduction to Real Analysis (Manfred Stoll)을 선택하여 수업을 진행한다.

1) 1주: 함수와 수학적 귀납법

• 함수의 개념을 이해하고 특성별로 분류한다.

• 수학적 귀납법을 이해하고 귀납법을 이용하여 자연수에 의존하는 수학적 명제들의 증명에 대해서 이해한다.

◆ 유의사항

① 집합 A_1과 A_2가 함수 f의 정의역에 속할 때 $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$이지만 일반적으로 $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$이다.

② 함수의 역상(inverse image)에 대해서는 위의 식에서 둘 다 등식이 성립한다.

③ 수학적 명제별 수학적 귀납법(제1, 제2)들의 적용을 구분하며, 수정된 귀납법의 적용에 대해서도 이해한다.

◆ 현장 교육과정과의 연계성

① 고교과정에서의 함수 단원.

② 고교과정에서의 수학적 귀납법.

③ 수열 단원에서의 수열의 일반항구성.

2) 2주: 실수체계

- 실수계(real number system)의 대수적 성질에 대해서 이해한다.
- 실수계의 최소 상계원리(least upper bound principle)에 대해서 이해한다.

◆ 유의사항

① 실수계는 연산 덧셈과 곱셈에 대해서 닫혀있는 체(field)이다.

② 유계인 집합의 상한 혹은 하한과 이에 대응하는 개념인 최대 혹은 최소를 구분하고 상한 혹은 하한 개념을 이용하여 유계인 유리수 집합의 상한 혹은 하한은 그 집합에 속하지 않는 무리수가 될 수 있음을 보인다.

◆ 현장 교육과정과의 연계성

① 연산의 정의와 그 연산에 대한 닫힘성.

3) 3주: 실수완비성의 결과

- 실수계의 완비성(completeness principle)과 그 결과 혹은 응용에 대해서 이해한다.

◆ 유의사항

① 실수계의 완비성의 결과로 아르키메디안 원리(Archimedian principle)에 대해서 이해한다.

② 유리수와 무리수는 실수의 조밀 부분집합(dense subset)임을 이해한다.

◆ 현장 교육과정과의 연계성

① 지수함수의 정의역 혹은 지수법칙이 실수까지 확장할 수 있다.

예) $3^{\sqrt{2}} = \sup\{3^r \mid r \in Q, \ \ r < \sqrt{2}\}$ 여기서 Q는 유리수 집합.

4) 4주: 수열과 수열의 극한

• 수열의 극한에 대해서 이해하고 특히 $\epsilon - N$ 논법에 대해서 이해한다.

• 수열의 극한정리를 직관이 아닌 위의 $\epsilon - N$ 논법을 이용하여 증명할 수 있다.

◆ 유의사항

① $\epsilon - N$ 논법은 실수완비성 결과의 아르키메디안 원리(Archimedian principle)에 의한 것으로 학습 과정상의 계통성을 주지하고 이 원리는 미분적분학 등 선수전공에서 일반적으로 알려진 특정 수열의 극한정리를 증명하는 데 사용이 가능하다.

예) 만약 $p > 1$이고 a는 임의의 실수일 때 $\lim_{n\to\infty} \frac{n^a}{p^n} = 0$이다.

② 수열의 극한정리와는 별개로 유계인 수열과 0으로 수렴하는 수열의 곱의 극한은 항상 0이다.

◆ 현장 교육과정과의 연계성

① 수열 단원, 특히 수열의 극한정리와 조임정리의 이해와 활용.

5) 5주: 단조수열

• 단조수열(monotone sequence)을 이해하고 단조수렴정리(monotone convergence theorem)를 이해한다.

• 축소구간열정리(nested interval property)를 이해하고 실수완비성과의 연계성을 이해한다.

◆ 유의사항

① 단조수렴정리(monotone convergence theorem)는 실수완비성의 공리하에 증명이 가능하므로 실수완비성으로부터 파생된 정리라 볼수가 있지만, 단조수렴정리(monotone convergence theorem) 자체를 공리로 인정하면 실수완비성이 그에 파생되는 정리가 될 수 있다. 이를 보여주는 예제는 다음과 같다:

예제) 만약 모든 위로 유계인 단조증가수열이 극한을 가진다고 한다면 위로 유계인 임의의 실수 부분집합은 항상 상한을 가짐을 보이시오. (Introduction to Real Analysis (Manfred Stoll) p. 67).

② 축소구간열정리(nested interval property) 또한 단조수렴정리(monotone convergence theorem)의 하나로 계통성이 있는 정리이다. 따라서 위의 예제에서 보일 수 있듯이 축소구간

열 정리를 공리로 인정하면 역시 실수완비성이 그에 파생되는 정리가 될 수 있다. 따라서 상호 무관한 정리로 오인할 수 있는 학생들에게 그 계통성을 강조함으로써 학생들에게 정리 간의 상호연결성을 명확히 이해할 수 있도록 하고 정리 간의 통합적 이해가 가능한 마인드맵의 구성을 유도하고 안내한다.

◆ 현장 교육과정과의 연계성

① 무한히 감소하는 양의 수열은 수렴한다, 혹은 위로 한정 없이 무한히 증가하는 수열은 발산한다.

예) 수열 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$은 0으로 수렴하고 수열$\{n\}$은 ∞로 발산한다.

6) 6주: 부분 수열, 상극한과 하극한

• 부분 수열과 볼짜노 바이어슈트라스정리(Bolzano Weierstrass theorem)에 대해서 이해한다.

• 상극한과 하극한에 대해서 이해한다.

◆ 유의사항

① 볼짜노 바이어슈트라스정리(Bolzano Weierstrass theorem)의 증명법은 여러 가지가 있지만 축소구간열정리(nested interval property)나 임의의 수열은 단조 부분 수열을 가진다는 정리를 활용할 수 있다. 이는 결국 볼짜노 바이어슈트라스정리(Bolzano Weierstrass theorem)는 실수의 완비성과 밀접한 관계임을 되새길 필요가 있다. 즉, 위의 5주 차에서 다루었던 예제에서 볼짜노 바이어슈트라스정리(Bolzano Weierstrass theorem)를 공리로 인정한다면 축소구간 열 정리(nested interval property)를 통하여 실수완비성이 정리로 뒤따르는 성질을 파악할 수 있다. 이점을 유념하여 수업 시 학생들에게 잘 전달한다면 학생들이 정리의 상호 연관성과 계통성에 대한 이해를 통하여 수학적 마인드맵의 구성을 돕고 나아가 문제별 상황별 이해와 그 해결 능력을 키우는 데 도움이 되리라 판단된다.

② 상극한과 하극한 개념들은 학생들이 처음 접하기에 낯선 개념들이다. 그 개념들을 일반적인 동치 조건과 같은 정리로 증명 혹은 설명하기 이전에 쉬운 예(e.g.$\{(-1)^n\}$)를 들어서 상극한과 하극한 개념에 학생들이 접근하게 하는 것이 필요하다고 판단된다.

◆ 현장 교육과정과의 연계성

① 수열 $\{(-1)^n\}$은 발산하지만, 짝수항의 부분 수열은 1로, 홀수 항의 부분 수열은 -1로 각각 수렴함을 안다.

7) 7주: 코시수열과 무한급수

- 코시수열(Cauchy sequence)과 코시판정법(Cauchy criterion)을 이해한다.
- 코시판정법(Cauchy criterion)을 이용하여 무한급수의 수렴, 발산을 판정한다.

◆ 유의사항

① 실수계에서는 수렴하는 수열과 코시수열(Cauchy sequence)이 동치임을 강조하여 수열의 수렴 혹은 발산 판정에서 코시수열(Cauchy sequence)이 가지는 중요성을 학생들에게 각인시킨다.

② 위에서 말한 코시판정법(Cauchy criterion), 즉 "수열이 수렴할 필요충분조건은 그 수열이 코시수열(Cauchy sequence)이다"라는 사실은 근원으로 올라가면 실수의 최소 상계원리(least upper bound property)와 연결된다. 즉 실수의 최소 상계원리(least upper bound property) ⇒ 축소구간열정리(nested interval property) ⇒ 볼짜노 바이어슈트라스정리(Bolzano Weierstrass theorem) ⇒ 코시판정법(Cauchy criterion)에 이르는 논리구조의 마인드맵을 구성할 수 있다. 또한 이전에 살펴본 바와 같이 각 정리를 공리로 격상하면 화살표의 역방향이 성립함을 보임으로써 위의 논리구조에 해당하는 정리들이 상호 대등하다는 사실도 밝힌 바 있다. 이에 방점을 찍는 사실은 코시판정법(Cauchy criterion), 즉 "수열이 수렴할 필요충분조건은 그 수열이 코시수열(Cauchy sequence)이다"라는 사실을 공리로 인정하면 실수의 최소 상계원리(least upper bound property)가 정리로 뒤따른다는 것을 역시 5주 차에 소개했던 예제를 통하여 보일 수 있다. 이점은 실수의 순서성에 따른 최소 상계원리(least upper bound property)를 순서가 없는 일반집합으로 확장 혹은 일반화한 개념이 완비성(completeness property), 즉 "그 집합 상의 모든 코시수열은 그 집합에서 수렴한다"로 일반화되고 이것은 해석학과 관련한 많은 전공에서 매우 중요한 개념으로 사용됨을 학생들에게 주지시킨다.

③ 무한급수의 수렴 혹은 발산의 판정은 급수의 n부분합으로 이루어진 부분합 열을 구성하고 그 부분합 열의 수렴 혹은 발산의 판정으로 귀결되고 이는 곧 코시판정법(Cauchy criterion)과 직접적으로 연관이 있게 된다. 이점은 학생들이 처음에는 생소하게 받아들이는 점이다. 왜냐면 학생들은 무한급수의 합을 구하고자 하는데, 익숙해 있고 급수를 부분합 열로 구성하고 그 열이 코시수열(Cauchy sequence)인가 아닌가의 관점구성에는 취약하기 때문이다. 따라서 앞선 수열에 대한 여러 정리가 무한급수의 수렴 혹은 발산 판정에 응용된다는 점과 궁극적으로 코시판정(Cauchy criterion)법이 무한급수와 같이 합을 일반적으로 갈음하기 힘든 경우에 어떻게 유용하게 사용되는지에 대한 이해가 되도록 지도해야 할 것이다.

◆ 현장 교육과정과의 연계성

① 급수의 수렴 및 발산.

② 정적분의 구분구적법 분 값 구하기.

8) 8주: 중간고사

1~7주까지의 학습 내용의 중간고사 실시.

9) 9주: 실수계의 위상

• 실수계의 개집합, 폐집합, 그리고 콤팩트집합(compact set)에 대하여 이해한다.

◆ 유의사항

① 개구간 $(a,\ b)$는 실수계에서 대표적인 연결된 개집합임을 학생들에게 주지시키고 학생들이 폐구간 $[a,\ b]$가 폐집합임은 알고 있으나 유한집합 혹은 집합$(-\infty,\ b]$, $[a,\ \infty)$들이 폐집합임을 모르는 경우가 많으므로 이점 주의시킨다.

② 집합의 내부점, 외부점, 그리고 경계점에 대해서 이해할 수 있도록 하고 개집합에 속하는 모든 점은 내부점임을 주지시킨다. 특히 집합의 극한점(limit point)의 명확한 이해를 돕도록 예제를 제시한다.

③ 학생들이 콤팩트집합(compact set)의 이해가 부족한 경우가 많다. 하이네보렐정리(Heine Borel Theorem)의 증명과 함께 실수에서 흔히 접하는 유계 폐구간 $[a,\ b]$가 콤팩트집합(compact set)의 대표적인 예에 해당함을 주지시킨다.

◆ 현장 교육과정과의 연계성

① 열린 구간, 닫힌 구간 개념.

10) 10주: 함수의 극한 1

• 함수의 극한개념과 $\epsilon-\delta$논법에 대해서 이해한다.

• 함수의 극한정리와 수열 판정법(sequence criterion)에 대해서 이해한다.

◆ 유의사항

① 함수의 극한은 반드시 함수의 정의역의 극한점(limit point)에서 정의됨을 강조한다.

② 함수가 극한을 가질 때에 학생들이 $\epsilon-\delta$법을 동원하여 그 증명에만 매달리는 경향이 있지만 어떤 함수가 극한을 가지지 않는 경우 왜 극한을 가지지 않는지의 설명에 어려움을 느끼는 경우가 종종 있다. 그런 경우 $\epsilon-\delta$법을 통한 모순유도 혹은 수열 판정법 등을 동원하

여 극한을 가지지 않는 경우의 설명도 원활히 할 수 있도록 연습할 필요가 있다.

◆ 현장 교육과정과의 연계성

① 함수의 극한.

11) 11주: 함수의 극한과 연속성

- 함수의 연속성과 $\epsilon-\delta$논법에 대해서 이해한다.
- 연속함수의 성질들을 이해한다.

◆ 유의사항

① 함수의 극한과 달리 함수의 연속성은 극한점(limit point)이 아닌 고립점(isolated point)에서도 정의할 수 있음을 강조한다. 일반적으로 학생들이 선수전공 특히 미분적분학에서 알고 있던 직관적 개념의 함수의 연속성이 좀 더 확장됨을 이해시킨다.

② Dirichlet 함수의 예를 통하여 모든 점에서 불연속인 함수가 존재하는가 하면 Thomae함수의 예를 통하여 함수의 정의역 상의 모든 유리수 상에서 불연속이고 무리수 상에서 연속인 특이한 형태의 연속성 혹은 불연속성에 대해서 이해할 수 있도록 한다.

③ 연속함수의 사잇값 정리는 충분조건으로 불연속이면서 사잇값 정리를 만족하는 예를 소개한다.

◆ 현장 교육과정과의 연계성

① 함수의 연속개념, 연속함수의 사잇값 정리.

12) 12주: 연속함수의 특징과 구분

- 연속의 위상적 정의를 이해하고 이에 따른 연속함수의 특징을 이해한다.
- 함수의 일반 연속성과 균등연속성(uniform continuity)을 구분하여 이해한다.

◆ 유의사항

① 연속의 위상적 정의(topological characterization)에 대해서 자세히 이해할 수 있도록 한다. 일단 이 개념은 학생들이 처음엔 생소할 수 있는 개념에 해당한다. 실수 상에서의 연속성을 일반 위상공간에서의 연속성으로의 확장은 어떤 위상적 성질을 가져야 하는지 학생들이 이해할 필요가 있다. 이를 기반으로 위상수학의 이해에도 도움이 될 것이다. 그리고 함수가 콤팩트집합(compact set) 상에서 연속이면 무조건 최대, 최소를 가진다는 정리 또한 연속의 위상적 성질을 이용하여 보일 수 있고 이는 미분적분학에서 다룬 페르마 정리(Fermat's theorem)를 일반화한 것에 해당한다. 그뿐만 아니라, 이 최대, 최소 정리는 사실 실수의 최소

상계원리(least upper bound property)를 이용하고 정의역이 유계 폐구간(bounded closed interval), 즉 콤팩트집합(compact set)이다는 위상적 성질을 이용하여 증명이 가능한 정리이므로 학생들의 다양한 이해를 위하여 다양한 방법으로 증명할 필요가 있다.
② 학생들이 일반 연속과 균등연속(uniform continuity)의 차이를 이해하기 어려워하는 경향이 있다. 균등연속성(uniform continuity)이 주는 추상적 개념을 학생들에게 이해시키기 위해서는 구체적인 함수의 예를 들어서 실제 $\epsilon-\delta$논법의 적용례를 비교 분석할 필요가 있다. 그리고 연속함수가 균등연속일 충분조건들은 함수의 조건과 함수의 정의역의 조건 등으로 구분하여 설명하고 그에 대응하는 예를 각각 들어서 학생들의 이해를 도울 필요가 있다.

◆ 현장 교육과정과의 연계성
① 연속함수의 최대, 최소 정리.

13) 13주: 단조함수

• 단조함수(monotone function)와 그 특징에 대해서 이해한다.
◆ 유의사항
① 단조함수(monotone function)는 내부점(interior point)에서 좌극한(left limit)과 우극한(right limit)을 가지는 특징이 있고 순증가(strictly increasing) 혹은 순감소(strictly decreasing)함수의 경우 역함수는 연속이 되는 점을 강조하여 학생들이 단조함수와 관련한 후속 정리나 문제에 잘 대응하도록 한다.
◆ 현장 교육과정과의 연계성
① 증가함수, 감소함수.

14) 14주: 함수의 미분

• 극한개념을 바탕으로 미분계수와 도함수를 이해한다.
• 미분가능함수의 여러 가지 성질에 대해서 이해한다.
◆ 유의사항
① 함수의 미분 가능성과 도함수의 연속성은 별개임을 예시를 통하여 강조한다.

예) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$는 0에서 미분가능이지만 도함수는 0에서 불연속.

② 일반적으로 함수f가 유계 폐구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 개구간 $(a,\ b)$에서 미분가능이며

$f(a)=f(b)$일 때 성립하는 정리인데, 학생들이 그 이유를 정확히 모르는 경우가 많다. 왜 폐구간의 경계에 해당하는 점a, b에서의 미분 가능성이 불필요한지 예시로 설명이 필요하다.

예) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$는 폐구간 $[-1,\ 1]$상에서 연속이고 개구간$(-1,1)$에서 미분가능이며 경계점 $-1,\ 1$에서 미분 불가지만 롤의 정리를 만족한다.

③ 미분의 사잇값 정리에 해당하는 Darboux 정리는 연속함수의 성질과는 달리 도함수의 연속성이 필요하지 않다는 점을 학생들에게 주지시킬 필요가 있다.

◆ 현장 교육과정과의 연계성

① 미분과 미분계수, 도함수, 롤의 정리, 평균치정리 등.

III. 결론 및 제언

기초해석학은 현재 사범대학 학생들의 수학적 배경 지식의 함양은 물론이고 현장교육과 직간접적으로 연계된 중요한 전공이다. 대부분 학생이 미분적분학 등 선수전공에서 직관과 공식에 의존한 단순 문제 풀이에 길이 들여져 있어 해석학적 문제해결에 어려움을 많이 느끼고 있고 단원별 상호 연계성의 파악이나 문제해결 아이디어의 발현 등에 익숙지 못한 경우가 허다하다. 이는 본 전공의 학습역량의 문제에 국한된 것이 아니라, 본 전공과 관련된 타 전공의 학습에도 영향을 끼치고 나아가 장래의 현장교육 역량의 배양에도 영향을 끼치는 중대한 문제이다. 이에 본 연구에서는 기초해석학뿐만 아니라 중등학교 현장 교과와 밀접하게 연계되는 부분인 실수계와 수열의 수렴성 부분 그리고 함수의 극한과 연속 등의 부분에 대하여 학생들이 기초해석학을 학습하는 데 도움이 될 수학적 마인드맵의 구성을 제안하고 강의 중에 느꼈던 학습상의 유의점을 본 논문에서 요약하였다. 학생들이 처음부터 지엽적인 문제나 국소적인 이해에 몰두한 나머지 놓치기 쉬운 중요했던 부분을 요약하면 다음과 같다. 먼저 실수계의 이해는 수열의 수렴성뿐만 아니라 해석학 전반에 걸쳐 그 근간이 되는 매우 중요한 내용이다. 그런데도 학생들이 이를 등한시하거나 명확한 이해를 소홀히 하는 경우가 허다하다. 이를 방지하기 위하여 최소 상계원리(least upper bound property)로 대표적으로 명명되는 실수계의 특성의 이해를 이어서 나오는 수열 그리고 함수 부분의 설명에 요소마다 연계해서 설명할 필요가 있다. 본문에서 설명한 대로 수열 부분의 논리 전개는 다음과 같다. 실수계의 최소 상계원리(least upper bound property) ⇒수열과 수열의 수렴⇒단조 수렴정리(monotone convergence theorem)⇒축소구간 열 정리(nested interval property)⇒부분 수열

과 볼짜노 바이어슈트라스 정리(Bolzano Weierstrass theorem)⇒코시판정법(Cauchy criterion)이다. 여기서 주의할 사항은 역시 본문에서 언급한 대로 각각의 정리를 공리로 격상하면 실수계의 최소 상계원리(least upper bound property)가 정리로 뒤따를 수 있다는 점을 강조하여 상호 대등한 논리 구조를 가진다는 점을 학생들에게 인식시켜 학습 과정의 이해를 돕고 흥미를 유발하여 능동적이고 창조적인 문제해결 능력배양에 이바지할 수 있도록 해야 할 것이다. 그리고 함수의 극한과 연속 부분에서는 미분적분학과는 다르게 함수의 정의역이 완비성이 없는 경우까지 망라해서 이해해야 하고 특히 연속성에서는 고립점 상의 연속성이 학생들에게 생소하게 느껴질 수 있으므로 그 점 또한 유의할 부분으로 판단되며 연속의 위상적 특성과 연속성의 분류에서는 학생들의 추상적인 사고를 요구하는 부분이라 적절한 함수의 예시를 통하여 학생들의 이해를 돕도록 노력해야 하는 부분이라고 판단된다. 위에서 살펴본 바와 같이 본 연구에서는 학생들에게 대학 수학의 상위에 있는 해석학의 명확한 이해와 스키마의 형성에 이바지하는 교수법을 제안하는 데 중점을 두었다. 해석학 강좌와 관련한 선행연구의 몇몇 예들은 해석학 강좌와 현장 교육과정과의 연계성과 문제 해결방법론 (Lee, 2003), 그리고 해석학의 특정 단원에 해당하는 부분에 대한 학생들의 이해 동향에 관한 연구들로 국한되었었다 (Oh, 2020). 그러나 해석학 강좌의 교수법적 관점의 선행연구는 아직 극히 미진한 실정이다. 이에 본 연구는 해석학 강좌의 교수법 중심의 정성적 연구로서는 유례를 찾기 힘든 연구이다. 물론 참조할 선행연구의 부족으로 인하여 연구내용의 대조가 힘들었던 부분은 본 연구의 폭을 제한한 부분이고 이점은 앞으로 폭넓고 심도 있는 후속연구를 통하여 개선해야 할 점으로 생각된다. 또한, 기초해석학에 이은 해석학 강좌, 그리고 관련된 다른 전공에서도 좀 더 창의적이고 융 복합적인 교수법을 꾸준히 개발하고 이에 따르는 학생들의 반응을 꾸준히 추적, 관찰하는 후속연구도 필요하다고 판단된다. 본문과 위에서 살펴본 내용은 학생들의 학습 능력의 향상에 도움이 될 것이고 나아가 직접 연계된 중등학교 현장 교육의 교수법 역량배양에도 도움이 되리라 믿는다.

참고문헌

Ball, D. L., Lubienski, S. T., Mewborn, D. S., & Richardson, V. (2001). Handbook of research on teaching. ed., (pp. 433 – 456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Baumert, J. et al. (2010). Teacher's mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. American educational research journal, 47(1), 133 – 180.

Cho, W. Y. (2011). Mathematical content knowledge of secondary mathematics teachers. School Mathematics, 13(2), 347 – 364.

Cornu, B. (1981). Apprentissage de la notion de limite Modeles spontanes at modeles propres, Proceedings of the Fifth Conference of the International Group for the Psychology of Mathemtics Education, pp. 322-326.

Derher, A., Lindmeier, A., Heinze, A., & Niemand, C. (2018). What kind of content knowledge do secondary mathematics teachers need? Journal fur Mathematik-Didatik, 39(2), 319 – 341.

Even, R. (2011). The relevance of advanced mathematics studies to expertise in secondary school mathematics teaching: Practitioner's views. ZDM, 43(6), 941 – 950.

Fishbein, E., Tirosh, D. and Hess, P. (1979). The intuition of infinity, Educational studies in mathematics. 10, pp 3 – 40.

Hill, H., Rowan, B., & Ball. D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. American Educational Research Journal, 42(2), 371 – 406.

Kang, H. Y. et al. (2011). Mathematics teachers' perspectives on competencies for good teaching and perspective teacher education. School Mathematics, 13(4), 633 – 649.

Klein, F. (1932). Elementary mathematics from an advanced standpoint: arithmetic, algebra, analysis, Vol. 1. New York: Macmillan.

Lee, B. S. (2003). Analysis course operated by the department of mathematics education, teacher training college, Communications of Mathematical Education, 15, 23 – 28.

Lee, B. S. (2003). Teaching and learning of analysis in the department of mathematics education, teacher training college, The Mathematical Education, 42(4), 541-559.

Lee, J. Y. et al. (2019). High school calculus. Seoul: Chunjae Education.

Lee, M. H. & Kim, S. H. (2016). Some suggestions of revising the university textbook to overcome the double discontinuity of pre-service mathematics teachers on functions, Teacher Education Research, 55(3), 327 – 338.

Oh, H. Y. (2020). Study on understanding infinite series, Communications of Mathematical Education, 34(3), 355–372.

Park, K. M. (2009). A meta review of the researches on PCK in mathematics. The Mathematical Education, 48(1), 93 – 105.

Robert, A. (1982). L'acquisition de la notion de convergence des suites numeriques dans l'enseignement superieur. Recherches en Didactique des Mathematiques, 3, pp.307 – 341.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistermoolgiques relatifx a la notion de limite, Recherches en Didactique des Mathematiques, 6, pp. 5-67.

Yang, S. A., & Lee, S. J. (2019). Secondary teachers' advanced knowledge for teaching algebra. School Mathematics, 21(2), 419 – 439.

Zazkis, R., & Leikin, R. (2010). Advanced mathematical knowledge in teaching practice: Perceptions of secondary mathematics teachers. Mathematical thinking and learning, 12(4), 263 – 281.

Learning and Teaching Methods of Introduction to Mathematical Analysis in Teacher Training University

Hwang, Jinsoo

<Abstract>

Introduction of analysis is an important major that is directly or indirectly linked to field education as well as to cultivating the mathematical background knowledge of current teachers' college students. Most students find it difficult to solve analytical problems because they are accustomed to solving simple problems relying on intuition and formulas in prerequisite majors such as differential calculus, and there are many cases in which they are not familiar with understanding the interconnectivity of each unit or developing problem-solving ideas . In this introductory analysis course, it is largely divided into two parts: the convergence part of the real number system and sequence, and the limit and continuity part of the function. This paper summarizes the composition of a mathematical mind map that will help students learn basic analysis and the learning points felt during the 1-semester lecture. We believe that the content we will look at in this text will help improve students' learning abilities and further help develop teaching skills in directly related field education.

keywords: Introduction of Analysis, Real Number System, Analytical Problem Solving

학교교육연구, 제14권 2호, pp. 49-66(2024. 09.)

교사 양성대학에서의 복소해석학 개론의 학습과 지도에 관한 소고

황진수*

요약

교원양성대학의 복소해석학개론(혹은 복소해석학 I)강좌를 수강하는 대부분 학생은 해석학이 실수계상에서 전개되었고, 수 체계도 실수계에서 복소수계까지 확장이 가능한 관계로 당연히 해석학도 복소수계에 전개가 가능하다는 단순한 논리로 본 전공을 대하고 있다. 아래의 본문에서 살펴볼 내용이지만 단순히 허수의 대상적 이해의 연장선상에서 해석학적 개념을 전개한다는 생각을 넘어 복소함수를 구성하는 실수부 함수와 허수부 함수를 생각하고 해석학적 개념을 탐구하는 과정에서 파생된 그들 함수의 특성을 이해한다는 관점을 가지는 것이 중요하다. 따라서 본 논문에서는 1학기 동안 복소해석학개론 강좌를 진행하는 동안 느꼈던 내용으로, 학생들이 빠지기 쉬운 오개념과 그것을 극복하는 방법, 그리고 유의사항과 현장교육과의 연계성에 대해 고찰하였다. 이를 계기로 학생들이 본 전공을 바라보는 안목의 전환을 유도하여 학습 능력의 향상과 흥미를 일깨우고 나아가 학생들이 장차 현장 교육에 임함에도 교수학적 관점을 넘어서는 자신만의 교육, 학습 팁 개발에도 도움이 되리라 믿는다.

핵심어: 복소수, 허수, 복소함수의 특성

* 대구대학교 사범대학 수학교육과 교수

I. 서론

복소해석학은 사범대학 수학교육과 3학년 학생들이 수강하는 전공이다. 누구나 전공명에서 알 수 있듯이 복소수와 관련한 해석학 정도로 이해하기에 십상이고 학생들도 대부분 그런 생각으로 전공 공부에 임하게 된다. 그런데 본문에서 살펴보겠지만 허수 자체를 명확한 수 체계로 받아들이기까지 많은 시간이 필요하였다는 사실은 허수의 필요성은 애초에 인지하고 사용하고 있었다 하더라도 선뜻 실수체계의 상식을 넘어서는 '허수'라는 것을 진정으로 받아들일 수 있을까? 하는 의문 때문일 것이다. 이는 유리수 체계에서 무리수를 발견하게 되어 유리수계에서 확장된 실수체계를 완성하는 과정에서, 무리수라는 정체성의 의심을 하지 않았던 것과는 대비된다고 할 수 있을 것이다. 따라서 복소수를 받아들인 역사는 실수와 허수의 대립이 해소되어 실수와 허수를 아우르는 포괄적인 개념인 복소수라는 체계를 신뢰하는 과정이었다.

교원양성대학에서 복소해석학은 일단 시작부터 $i\,(=\sqrt{-1})$을 포함하는 궤변적인 수 체계가 나오고 그로 말미암은 대수적 구조부터 학생들이 학습하게 된다. 대부분 학생은 방정식 $x^2+1=0$와 같이 실수 범위 내에서는 해를 못 구하는 방정식의 해를 구하기 위해 편의적으로 '허수'라는 개념을 도입했다고 막연하게 알고 있고 실제로 그렇게 고교 현장 교육을 거쳤으며 전공의 도입부에서도 사실 그 정도의 이해 수준을 바탕으로 강의가 진행된다. 물론 고교 현장 교육에서도 이차방정식의 근을 구하는 과정에서 때때로 허수가 등장할 수 있고 그 허수들의 모임에서도 연산이 정의된다는 정도의 이해만을 요구하고 있다. 그러나 교사는 현장에서 학생들을 지도하기 위하여 많은 수학적 전공지식이 필요하다는 것은 매우 상식적이고 잘 알려진 사실이다. (Baumert et al., 2010; Cho. 2011; Dreher et al., 2018), Klein(1932)에 따르면, 교사의 지식은 대상 학생들과 비교해서 매우 크고 넓어야 하며 학생들이 학습 과정에서 만날 수 있는 다양한 오해나 난관을 슬기롭게 극복할 수 있도록 지도할 수 있어야 한다고 밝혔다. 또한 (Ball et al., 2001; Baumert et al., 2010; Even, 2011; Hill et al., 2005)′는 수학적 전공지식이 풍부한 교사 수업의 질이 높다고 보고했다. 이는 단순한 교수학적 방법론에 못지않게 전공지식의 함양이 좋은 수업의 구성에 필요요건임을 암시한다. 따라서 복소수 체계에 대한 피상적인 이해나 단순한 대수적 연산의 학습에 그치지 않고 복소수 계에 해석학적 개념을 도입하고 탐구함으로써 파생되는 복소함수의 특징과 그와 연계되는 일련의 이론을 학습하는 것은 단순히 실수계에서의 해석학적 개념을 복소수계로 확장했다는 데에

그치지 않고 더 많은 수학적 지식을 쌓고 실생활에서 응용 및 활용까지 가능한 과학적 의미를 구현하는 값진 학습활동임은 분명하다. 따라서 복소해석학의 명확한 이해와 응용은 사범대 수학교육과 학생들에게 수학적 마인드의 형성에 이바지하고 나아가 학교 현장에서 학생들을 지도하는 데 있어서 넓고 다양한 수학적 식견을 갖추게 하는 데 도움이 되리라 믿는다. 이에 본 논문에서는 처음엔 생소하게 다가올 수 있는 1학기 분량의 복소해석학 기초개념의 학습에서의 유의사항에 대해서 생각하고 학생들이 쉽게 빠지는 오류를 피하고 효과적인 학습이 될 방안에 대해서 고민하고 대안을 제시하고자 한다.

II. 이론적 배경

1. 복소수의 기원과 역사

Leopold Kronecker는 1886년 한 강의에서 정수는 신이 만들었고 나머지는 모두 인간이 만든 것이라고 주장했다. 그렇다면 복소수는 확실히 인류의 가장 흥미로운 수학적 창조물 중 하나라고 할 수 있다. 수 세기 동안 그것은 수학자 혹은 철학자 모두에게 놀라운 존재였다. 익히 알려진 대로 복소수 개념은 Girolamo Cardano의 *Ars Magna* (The Great Art)에 처음 등장한 후 현대의 엄격한 수학적 기준을 충족하는 공식적인 정의가 결정되기까지 거의 300여 년이 걸렸다. 그러나 여기서 우리가 주목할 사실은 복소수를 수학적인 명확한 대상으로 받아들이는 데 거의 300여 년이 걸렸지만, 훨씬 더 정교하고 광범위한 복소해석학의 주요 부분을 완료하는 데는 그 시간의 10분의 1도 채 걸리지 않았다는 데에 있다. Cardano는 *Ars Magna* 에서 다음의 널리 알려진 방정식

$$x + y + 10, \quad xy = 40$$

을 만족하는 해는 $x = 5 + \sqrt{-15}$, $y = 5 - \sqrt{-15}$ 임을 밝혔다. 그는 궤변적인 수 $\sqrt{-15}$ 의 정체에 대해서는 구체적인 해석을 하지 않았고 단지 위의 해들은 방정식이 요구하는 대수적 법칙을 만족한다고 했고 여전히 궤변적인 수 $\sqrt{-15}$ 에 대해서는 그조차도 받아들이지 못했던 거로 알려져 있다. 그는 역시 *Ars Magna*에서 방정식 $x^3 - 15x - 4 = 0$의 해는 수학자 Tartaglia의 공식을 통하여

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

와 같이 주어짐을 보였는데, 이 또한 궤변적인 수 $\sqrt{-121}$ 를 포함하는 해로서 위의 방정식을 만족하는 명확한 해 $x = 4$에 대비되는 다른 형태의 해임을 주목할 필요가 있었다. 두 경우

모두 수학자들의 숫자에 대한 직관 혹은 상식과 Cardano가 수행한 상징적인 수학적 조작 사이에 괴리가 있었다. 수학자들이 숫자 개념을 확장하고 Cardano의 관찰이 타당할 수 있는 세련된 직관을 개발하는 데 수 세기가 걸렸다. 그 과정 중 첫 번째로 Raphael Bombelli(1526-73)는 '불가능한' 근을 마치 일반 숫자인 것처럼 조작하여 위 방정식의 두 해를 조화시키는 방법을 다음과 같이 제안하였다. 즉

$$(2 \pm \sqrt{-1})^3 = 2 \pm \sqrt{-121}$$

을 이용하면 위의 Cardano에 의한 해의 표현이 $x = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4$가 된다고 주장하였다. 즉, Bombelli의 주장은 복소수가 실제 수학 문제를 해결하는 데 유용할 수 있다는 첫 번째 힌트를 제공하였지만, 그 메시지가 이해되기까지 오랜 시간이 걸렸다.

La Géometrie(1637)에서 르네 데카르트는 '실수'와 '허수'를 구별하여 허수의 발생은 해당 문제가 해결 불가능하다는 표시로 해석했으며, 나중에 아이작 뉴턴도 이 의견을 공유했다. 이는 Bombelli에 의한 위의 해법의 정당성을 부정하는 것으로 인식되었다.

John Wallis는 1685년 그의 저서 대수학에서 복소수를 기하학적으로 표현하고자 했다. 고정된 직선에서 숫자의 실수 부분은 (부호가 지정된 방향으로) 측정되었고 허수부는 직각으로 측정되었다. 그러나 이 아이디어는 복소수 체계를 완벽히 신뢰하지 못한 관계로 거의 잊혀졌다. 이렇듯 갈팡질팡했던 복소수 체계에 관한 연구는 베르누이(John Bernoulli)와 수학의 아버지라 일컬어지는 레온하르트 오일러(Leonhard Euler)에 이르러 비약적으로 발전하게 된다. 특히 오일러는 베르누이에 의해 제안된 복소 로그함수의 구성에 이바지하였고 그 과정에서 오일러 공식으로 일컬어지는 공식

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

을 발견하였다. 특히 $\theta = \pi$인 경우의 식 $e^{i\pi} + 1 = 0$은 수학의 아름다운 식으로 널리 알려진 식이다.

복소수 이론의 또 다른 선구자로서 오일러의 제자 칼 프리드리히 가우스(Carl Friedrich Gauss)를 들 수 있다. 1799년 그는 박사 논문에서 18세기 초부터 수학자들이 우려했던 문제를 다루었다. 그 문제는 다음과 같다. “처음에는 실수 이차방정식의 해가 새로운 '복소수' 숫자로 이어질 수 있는 것처럼, 복소수 계수를 갖는 방정식의 해는 훨씬 더 많은 종류의 새로운 숫자로 이어질 것”이라고 널리 믿어졌다는 문제이고 장 달랑베르(Jean d′Alembert(1717-83))는 복소수만으로도 충분하다고 추측했다. 가우스는 그의 박사 논문 '대수학의 기본 정리'에서 이를 확인함으로써 복소수의 유용성에 대한 신뢰를 명확히 가지게 되었고 카르다노가 '허수'를 사용한 지 거의 3세기가 지난 1837년에 윌리엄 로완 해밀턴

(William Rowan Hamilton)은 명시적으로 실수의 순서쌍으로 복소수의 정의를 발표하기에 이르렀다. (같은 해에 Gauss는 Wolfgang Bolyai에게 자신이 1831년에 같은 생각을 발전시켰다고 썼다.)

2. 고교 현장 교육에서의 복소수

복소수는 현행 교육 과정상 고등학교 1학년 수학 I에서 등장한다. 먼저 복소수의 소개를 위하여 방정식 $x^2+1=0$을 만족하는 해는 실수 범위 내에서 해를 구할 수 없는 상황에 해당하고, 그런데도 위의 방정식을 만족하는 해를 관념적으로 생각하면 $i\,(=\sqrt{-1})$과같이 생각할 수 있고 이i를 '허수단위'로 정의하고 있다. 이를 일반화한 '실수부'a와 '허수부'b의 조합 $a+bi$을 복소수라 정의하고 그 켤레 또한 정의한다. 그다음으로는 일반적인 이차방정식의 근의 공식에서 '실근'과 복소수 근을 의미하는 '허근'이 존재하는 경우를 각각 소개한 다음 복소수 범위에서의 이차방정식의 인수분해, 그리고 복소수 간의 항등식의 내용도 다루고 있다.

고교현장의 복소수 단원의 논리성과 지도법에 관한 연구는 김흥기 외(2007), 양은영 외(2008), 이동환(2012) 등의 연구 결과를 참조할 수 있다.

3. 교원 양성대학에서의 복소해석학

교원양성 대학에서는 주로 학부 3학년에 복소해석학을 수강하도록 하고 있다. 선수전공은 주로 미분적분학과 해석학, 그리고 벡터 해석학이고 이들 전공을 수강했다는 전제하에 강의를 시작한다. 현장 교육에 필요한 복소수 관련 학습은 물론이고 학생들이 임용고시 준비에 온 힘을 다하도록 수업이 진행되고 있다.

먼저 복소수 체계에서 복소수가 덧셈과 곱셈에 대해서 닫힌 체(field)라는 사실을 밝히고 복소함수를 소개한다. 여기서 일반 실수함수와는 달리 복소함수는 실수부 함수와 허수부 함수의 쌍으로 함수가 구성되는 특징이 있다. 이렇게 구성한 복소함수를 기반으로 극한, 연속성, 그리고 미분을 정의한다. 특히 복소함수의 미분은 코시-리만 방정식(Cauchy-Riemann equation)을 만족하는 특징이 있고 실수함수와 다른 특징을 가지는데, 실수함수에서 그래프 접선의 기울기에 대응했던 미분계수 개념이 복소함수에서는 다른 개념으로 발전하게 된다. 즉 복소함수에서는 어떤 점과 그 점 근방에서 미분 가능한 함수의 경우 그 함수는 그 점에서 정칙성(holomorphic)을 가진다고 하고 그 성질은 실수에서 말하는 해석적(analytic)이다는 것과 동치가 되어 일반적으로 정칙성(holomorphic)대신 해석적(analytic)이다는 용어로 통일

하고 있다.

물론, 물리학이나 과학의 중요한 현상을 표현할 때 종종 사용되는 정칙성(holomorphic)의 개념이 복소해석학에서 등장하는 것도 특이하고 더 나아가 정칙성(holomorphic)개념이 해석학에서 중요하게 취급되는 해석적(analytic)이다는 개념과 상통하는 것은 복소해석학의 이해에서 백미에 해당하는 신비로운 현상으로 봐야 할 것이다. 따라서 복소해석학의 주된 학습은 왜 복소함수의 정칙성(holomorphic)의 성질이 해석적(analytic)인가? 그리고 해석적 함수(analytic function)들의 특징 및 응용을 공부한다고 요약할 수 있다. 구체적으로 말하면 복소함수 버전(complex function version)의 기본함수(elementary function)들을 공부하고 그들이 해석적이다는 성질을 밝힌다. 그다음으로 해석함수의 적분을 공부하는데, 일단 도입은 실수부와 허수부 쌍으로 나타나는 벡터함수의 매개변수 적분에서 시작하여 해석함수는 닫힌 경로(closed contour)상의 적분이 항상 0이 된다는 코시구루사정리(Cauchy Goursat theorem)를 학습하고 이 정리로부터 코시적분공식(Cauchy integral formula)을 학습하게 된다. 코시적분공식(Cauchy integral formula)은 복소해석학의 근간이 되는 많은 중요한 성질과 연관된 매우 중요한 공식이다. 먼저 코시적분공식(Cauchy integral formula)을 통한 코시부등식(Cauchy inequality)으로 리우빌정리(Liouville theorem)와 코시적분공식(Cauchy integral formula)을 통한) 가우스평균(Gauss mean)을 이용하여 최대크기 원리(maximum modulus principle)를 증명할 수 있고 나아가 단순연결영역(simply connected domain)에서 해석적인 함수의 경우에 그 함수는 그 영역에서 테일러급수 전개(Taylor series expansion)가 항상 가능하다는 정리를 코시적분공식(Cauchy integral formula)을 통해 보임으로써 위에서 말한 함수의 정칙성(holomorphic)과 함수의 해석적(analytic) 성질이 동치가 되는지의 물음에 답할 수 있다. 그리고 어떤 복소함수가 어떤 영역 상의 고립점(isolated point)에서 미분이 불가한 특이점(singular point)을 가지는 경우 그 특이점에서 로랑급수 전개(Laurent series expansion)가 가능하다는 성질을 코시구루사정리(Cauchy Goursat theorem)와 코시적분공식(Cauchy integral formula)을 통하여 보이고 그 전개로부터 특이점을 감싸는 경로상의 적분을 그 특이점에서의 유수(residue)를 통하여 계산할 수 있다는 유수정리(residue theorem)를 학습한다. 이 유수정리는 그 자체뿐만 아니라 뒤이어 전개되는 실변수 함수의 이상적분의 계산과 삼각함수를 피적분 함수로 갖는 정적분의 계산, 그리고 어떤 폐경로(closed contour)내에서 유리함수(meromorphic function)가 가지는 영점의 개수를 정하는 루셰의 정리(Rouche's theorem)를 증명하는데 응용할 수 있다. 이상으로 살펴본 내용은 교원양성대학에서 일반적으로 다루는 복소해석학의 학습 내용에 해당하고, 위의 범위 내에서 매년 임용고시 문제가 아

래의 예시와 같이 출제되고 있다.

복소평면에서 중심이 i이고 반지름의 길이가 2인 원을 시계반대방향으로 한 바퀴 도는 곡선 C에 대하여 선적분

$$\int_C \left\{ \frac{4e^{-iz}}{(z+6i)(z-2i)} + \bar{z} \right\} dz$$

의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레 복소수이다.) **[2022학년도 기출]**

복소방정식 $z^3 - z - 4 = 0$이 영역 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$에서 갖는 근의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원을 시계반대방향으로 한 바퀴 도는 곡선을 C라 할 때, 선적분 $\int_C \frac{1}{(z-3)(z^3-z-4)} dz$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.
(단, 다중근의 경우 중복되는 수만큼 근의 개수로 인정한다.) **[2023학년도 기출]**
※ 다음 정리는 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

함수 $f(z)$와 $g(z)$가 단순닫힌곡선 γ와 그 내부에서 해석적이라 하자. 곡선 γ 위의 모든 점 z에 대하여 부등식 $\lvert g(z) \rvert < \lvert f(z) \rvert$이 성립하면 두 함수 $f(z)$와 $f(z)+g(z)$는 γ 내부에서 같은 개수의 영점을 갖는다.

III. 주별 복소해석학 개론의 학습 내용과 유의점

본 전공은 선수전공으로 미분적분학, 해석학, 그리고 벡터 해석학(vector analysis)을 수강했다고 가정하고 진행되는 것이 일반적이다. 복소해석학개론은 말 그대로 본 전공의 개론 부분에 해당하고 1학기 15주의 강의로 구성되며 교재는 Complex variables and applications (J. W. Brown and R. V. Churchill)이며 매주별 학습 내용 및 유의사항은 아래와 같다.

1. 1주: 복소수 체계

- 복소수의 정의와 기원에 대해 이해한다.
- 복소수는 덧셈 연산과 곱셈 연산에 대해 닫힌 체(field)임을 이해한다.

◆ 유의사항

① 복소수에는 순서 관계가 성립하지 않는다.

② 두 복소수의 합은 R^2좌표 벡터의 합과 같은 성질을 갖는다.

③ 복소수는 크기(modulus)에 대하여 삼각부등식을 만족한다.

◆ 현장 교육과정과의 연계성

① 고교과정에서의 복소수 단원와 피타고라스정리.

② 연산의 정의와 연산에 대한 닫힘성.

2. 2주: 복소수의 극형식과 n제곱근

• 복소수의 극형식(exponential form)에 대하여 이해한다.

• 복소수의 주 편각(principal argument)과 일반편각, 그리고 드 모브레(de Movie)법칙을 이해한다.

◆ 유의사항

① 복소수 계수를 가지는 이차방정식의 근을 근의 공식을 통하여 구할 수 있다.

② 영이 아닌 복소수의 n제곱근은 그 복소수 크기의 n제곱근을 반경으로 갖는 원주를 n등분한 점들이다. 이는 실수에서 $x^2=4$을 만족하는 해가 원점을 중심으로 2, -2와 같이 대칭으로 나타나는 현상의 복소수로의 확장으로 이해할 수 있다.

◆ 현장 교육과정과의 연계성

① 피타고라스 정리에 의한 두 점 사이의 거리 계산.

② 삼각함수 단원.

3. 3주: 복소평면의 위상과 복소함수

• 복소평면 상의 개집합, 근방 계, 그리고 폐집합과 그 종류에 대해서 이해한다.

• 복소함수를 소개하고 그 표현법에 대해서 이해한다.

◆ 유의사항

① 복소평면은 완비공간(complete space)이다. 여기서 학생들이 해석학에서 학습했던 실수의 완비성과 다른 완비성으로 착각하는 경우가 많다. 순서 관계가 정의되지 않는 복소수라 할지라도 복소평면 상의 모든 코시 수열(Cauchy sequence)이 수렴한다는 의미에서의 완비성은 실수계와 같은 개념임을 주지시킨다.

② 복소함수의 표현은 직교좌표계와 극좌표계를 기반으로 각각 다른 표현이 가능하며 대부분은 복소함수의 전모를 그릴 수 없기에 부분별 사상(mapping)들의 조합으로 복소함수의 그래프를 추측할 수 있음을 예시로 보인다. 예) $f(z)=z^2$.

◆ 현장 교육과정과의 연계성

① 부등식의 영역.

② 이차곡선과 그 그래프.

4. 4주: 복소함수의 극한과 연속성

• 복소함수의 극한과 연속을 이해하고 특히 $\epsilon - \delta$논법에 대해서 이해한다.

• 극한을 가지는 복소함수들의 극한정리를 이해하고 연속인 복소함수들의 특징을 이해한다.

◆ 유의사항

① 복소함수에서의 근방 계(neighborhood system)는 실수의 경우보다 더 확장된 근방계 이므로 극한의 존재성의 판별 또한 주의를 필요로 한다.

예) 극한 $\lim_{z\to 0}\frac{\overline{z}}{z}$ 은 존재하지 않는다.

② 복소수계에서도 실수와 마찬가지로 ∞에서의 극한을 정의할 수 있으며, 여기서 ∞란 실수의 $+\infty$와 달리 복소수의 크기가 한없이 크고 방향이 임의인 복소수들을 상징적으로 "∞ 근방의 수"라 정의함을 학생들에게 유의시킨다.

◆ 현장 교육과정과의 연계성

① 함수의 극한 단원중 ∞에서의 극한.

5. 5주: 복소함수의 미분

• 복소함수의 미분과 미분 법칙에 대해서 이해한다.

◆ 유의사항

① 복소함수의 미분은 실함수에서의 그래프 접선의 기울기에 대응하는 미분계수와는 근원적으로 다른 기하학적 의미를 지닌다. 곧이어 나오는 정칙성(holomorphic)의 설명에 앞서 이점을 미리 학생들에게 주지시킨다.

② 복소함수가 미분가능이면 미분가능 실변수 함수가 만족했던 성질을 만족함을 이해한다.

◆ 현장 교육과정과의 연계성

① 함수의 극한, 미분 단원.

6. 6주: 코시-리만 방정식(Cauchy-Riemann equation)

• 복소함수가 미분가능이면 코시-리만 방정식(Cauchy-Riemann equation)을 필요적으로 만족함을 이해한다.

• 코시-리만 방정식(Cauchy-Riemann equation)을 직교좌표계와 극좌표계로 나누어 각각 이해하고 함수가 미분가능일 충분조건으로 코시-리만 방정식(Cauchy-Riemann equation) 이

외의 부가 조건에 대하여 이해한다.

◆ 유의사항

① 코시-리만 방정식(Cauchy-Riemann equation)은 복소함수가 미분가능일 필요조건일 뿐 충분조건은 아니다.

예) 함수 $f(z)=\begin{cases}\dfrac{(\bar{z})^2}{z}, & z\neq 0,\\ 0, & z=0\end{cases}$ 는 $z=0$에서 코시-리만 방정식(Cauchy-Riemann equation)을 만족하지만, 미분 불가다.

② 연속이면서 한점에서만 미분 가능한 복소함수가 존재한다.

예) 함수 $f(z)=|z|^2$는 $z=0$에서만 미분가능이다.

◆ 현장 교육과정과의 연계성

① 함수의 미분 단원 특히 합성함수의 미분법.

7. 7주: 해석적 함수(analytic function)와 조화함수(harmonic function)

• 복소함수에서는 정칙성(holomorphic)과 해석적(analytic)이 동치임을 이해한다.

• 복소함수가 정칙성(holomorphic)을 가지면 그 함수의 실수부와 허수부는 각각 조화함수(harmonic function)임을 이해한다.

◆ 유의사항

① 복소수 상의 어떤 점과 그 점의 어떤 근방에서 미분가능인 복소함수를 그 점에서 정칙(holomorphic)이라고 흔히 말한다. 그러나 배경 설명 없이 곧바로 그 복소함수는 그 점에서 해석적(analytic)이다고 비약해서 설명하는 때도 종종 있다. 이 부분부터 대부분 학생이 본 전공 교과에 이질감을 느끼기 시작하고 본질적인 이해 없이 피상적인 학습으로 일관하는 사례가 종종 있다. 문제는 복소함수의 정칙성(holomorphic)이 왜 해석적(analytic)인 성질과 같은 개념으로 이해되느냐 일 것이다. 그러나 대부분 교재에서는 이점을 부각하지 않고 있으며 심지어는 해석함수(analytic function)가 가지는 성질을 곧바로 열거한 책들도 있어 사전지식이 부족한 학생들의 경우 혼돈에 빠지고 논리의 공백에서 갈팡질팡하게 된다. 그리고 대부분 학생이 미분적분학이나 해석학에서 테일러급수 전개(Taylor series expansion) 부분의 학습과 이해가 부족한 경우가 많으므로 용어의 설명상 복소함수가 어떤 점에서

해석적(analytic)이라는 것은 그 점에서 테일러급수 전개(Taylor series expansion)가 가능하다는 것이라고 설명한다 해도 이를 생소하게 받아들이는 경우가 허다하다. 이에 저자는 여러 시행착오 끝에 일단 정칙성(holomorphic)이 내포하는 기하학적 의미를 코시-리만 방정식(Cauchy-Riemann equation)을 만족하는 함수의 성질로 보여주고 결국에는 정칙성(holomorphic)과 해석적(analytic)인 성질이 동치가 된다는 점은 학기말쯤에 보일 수 있을 것이라고 명시적으로 밝혀서 학생들의 이해 방향을 명확히 제시하여 학습에 혼란이 없도록 하는 것이 필요하다고 느꼈고 이점은 학생들의 학습 상담을 통해서 확인한 바 있다. 따라서 뒤이어 나오는 해석함수의 성질은 학기 말이나 그 이후에 개념을 더 명확히 숙지한 이후 되돌아와서 설명할 수 있도록 재편성할 필요가 있다.

② 해석함수의 실수부와 허수부 함수들은 조화함수(harmonic function)에 해당하며 실수부, 허수부들은 상호 공핵관계에 있다는 점에 유의시킨다.

◆ 현장 교육과정과의 연계성

① 여러 함수의 미분법, 고계도함수.

8. 8주: 중간고사

1~7주까지의 학습 내용의 중간고사 실시.

9. 9주: 복소 지수함수와 복소 로그함수

• 복소 지수함수를 이해하고 그 역에 해당하는 복소 로그함수를 이해한다.

• 복소 로그함수의 분지 절단(branch cut)을 이해한다.

◆ 유의사항

① 복소 로그함수의 도입은 실수와 마찬가지로 복소 지수함수(complex exponential function)의 역으로 나타나게 되고 지수방정식의 해는 복소수에서는 일반적으로 무한히 많이 존재하므로 아무런 제한이 없는 한 복소 로그함수(complex logarithmic function) 값도 무한히 많이 존재하게 된다. 이는 실수계의 지수함수와 로그함수와는 다른 성질에 해당하므로 학생들이 처음엔 생소하게 받아들이는 부분이다. 따라서 복소수에서는 로그값이 다가(multi-valued)의 형태이므로 연속성과 미분 가능성을 논하기 위하여 필수적으로 로그값을 일가(single valued) 함수로 전환할 필요가 있는데, 그래서 도입된 개념이 로그함수의 분지 절단(branch cut)에

해당함을 학생들에게 재차 강조할 필요가 있다.

◆ 현장 교육과정과의 연계성

① 복소 지수함수의 값이 다가(multi-valued)에 해당한다는 사실은 현장 교육에서 삼각함수의 주기가 2π 이다는 사실과 연관이 있다.

② 복소 로그함수의 이해는 나아가 고교현장에서의 로그함수를 더욱더 포괄적으로 이해하고 사용하는데 관련이 있다.

10. 10주: 복소 로그함수의 등식, 복소 지수함수 z^c, 그리고 복소 삼각함수

• 복소 로그함수가 만족하는 등식들에 대해서 이해한다.

• 복소 지수함수 z^c $(z \in C - \{0\},\ c \in C)$값을 구할 수 있다.

• 복소수 버전의 삼각함수를 정의하고 그 값들을 구한다.

◆ 유의사항

① 복소 로그함수의 분지가 결정되면 일반적인 로그의 등식이 성립하지 않을 수 있다.

② 복소 지수함수 z^c $(z \in C - \{0\},\ c \in C)$값은 일반적으로 다가(multi-valued)이고 로그의 분지를 결정하면 일가(single valued)이다.

③ 복소 삼각함수(complex trigonometric function)들은 복소 지수함수 e^{iz}, e^{-iz}들의 결합을 통해 정의할 수 있고 그 삼각함수들은 실수에서의 삼각함수 법칙을 만족하며 복소 삼각 함수(complex trigonometric function)들은 복소평면 상에서 비 유계(unbounded)임에 유의한다.

◆ 현장 교육과정과의 연계성

① 지수 로그 단원과 삼각함수 단원.

11. 11주:복소 쌍곡형함수(complex hyperbolic function)와 복소 초등함수들의 역함수

• 복소 쌍곡형함수(complex hyperbolic function)를 이해하고 그 역함수를 이해한다.

• 복소 삼각함수(complex trigonometric function)의 역함수를 이해한다.

◆ 유의사항

① 미분적분학의 실함수와는 다르게 복소 삼각함수(complex trigonometric function)나 복소 쌍곡형함수(complex hyperbolic function)들의 역함수는 복소 로그함수 꼴로 주어진다. 따라서 로그함수의 분지 절단(branch cut) 조건이 없으면 일반적으로 그들 역함수 값은 다 가

(multi-valued)의 형태로 주어진다.

◆ 현장 교육과정과의 연계성

① 이차방정식의 근의 공식, 역함수.

12. 12주: 복소함수의 적분

- 복소함수의 매개변수표현에 의한 경로 적분에 대하여 이해한다.
- 복소적분의 ML-부등식에 대하여 이해한다.

◆ 유의사항

① 복소함수의 경로 적분에서 피적분 함수가 복소 지수함수일 때 분지 절단(branch cut)이 적분 경로상에 포함되는 경우의 적분에 대해서 학생들이 생소하게 생각하거나 어려워하는 경우가 종종 있다. 이 경우 피적분 함수는 분지 절단(branch cut)에 의한 분지점(branch point)에서 불연속이므로 적분 경로를 변경하거나 그 분지점의 근방 점까지의 적분으로 근사하는 방법 등 연습이 필요한 부분이라고 판단된다.

◆ 현장 교육과정과의 연계성

① 미분적분학의 기본 정리에 의한 적분 값 계산, 유계 폐구간 상의 연속함수의 최대, 최소 정리.

13. 13주: 복소함수의 원시함수, 코시구루사정리

- 복소함수가 원시함수(anti-derivative)를 가지는 동치 조건에 대해서 이해한다.
- 해석함수의 닫힌 경로상의 적분 시 이용되는 코시 정리(Cauchy theorem)와 코시구루사정리(Cauchy-Goursat theorem)를 이해한다.

14. 14주: 코시적분공식, 해석함수의 최대크기 원리

- 코시구루사정리(Cauchy-Goursat theorem)를 통한 코시적분공식(Cauchy integral formula)과 그 확장을 이해한다.
- 코시적분공식(Cauchy integral formula)과 그 확장을 통하여 코시 부등식을 유도하여 전해석함수의 리우빌 정리(Liouville's theorem)와 해석함수의 최대크기 원리(maximal modulus principle)에 대해서 이해한다.

◆ 유의사항

① 해석함수의 최대크기 원리(maximal modulus principle) 부분을 처음에 생소하게 받아들이는 학생들이 많다. 이에 저자는 평면의 방정식과 같은 쉬운 조화함수의 예를 들어서 단순 연

결 영역(simply connected domain) 내부 점에서 최대, 최소를 가질 수 없다는 점을 강조함으로써 이 정리의 이해를 돕고자 했다.

15. 15주: 기말고사

9~14주까지의 학습 내용의 기말고사 실시.

IV. 결론 및 제언

교원양성대학의 복소해석학 개론(혹은 복소해석학 I)강좌에서는 복소수의 도입과 동시에 복소수 체계의 대수적 구조부터 학습하는데, 대부분 학생이 고교과정에서 복소수를 학습하였기에 이 부분의 학습은 학생들이 상대적으로 쉽게 받아들이는 부분이다. 그다음으로 복소함수를 도입하고 극한, 연속, 그리고 미분 가능성 등 해석학적 개념을 복소수 체계상에서 학습하게 되는데, 대부분 학생은 해석학이 실수계 상에서 전개되고 수 체계도 실수계에서 복소수계까지 확장이 가능한 관계로 당연히 해석학도 복소수계에 전개가 가능하다는 논리로 본 전공을 대하고 있다. 물론 일정 부분은 그렇다 할지라도, 흔히 정칙성(holomorphic)이라 일컬어지는 미분이 가능한 복소함수와 그 특징을 파악하는 것이 복소해석학에 입문하는 본령이라 해도 과언은 아닐 것이다. 여기서 정칙성(holomorphic)이란 본문에서 설명한 대로 수학적, 그리고 물리학적으로 의미를 지니는 함수의 특징을 말하는데, 어떤 복소함수가 어떤 근방 계에서 미분이 가능할 때 코시-리만 방정식(Cauchy-Riemann equation)을 통해 그 근방 계에서 가지는 성질이다. 그런데 이 성질은 놀랍게도 해석학에서의 해석적(analytic) 성질과 동치가 된다는 것이다. 그래서 위의 두 가지 용어(정칙성(holomorphic), 해석적(analytic))중 상대적으로 친근한 '해석적(analytic)'이라는 용어로 통일하여 사용하고 있고 복소해석학에서의 정칙성(holomorphic)을 갖는 함수의 특성은 해석적(analytic) 함수의 특징을 동시에 갖는다고 할 수 있다. 이 부분부터 많은 학생은 명확한 개념을 잘 이해하지 못하고 용어부터 매우 생소하게 느끼고 있음을 상담을 통해 확인하게 되었다. 이는 중등학교 현장으로 환치해서 생각해보아도 학생들이 수학적 용어, 그리고 그 용어의 개념을 잘 이해하지 못하면 학생들은 생소함과 이질감을 느끼게 되고 학습에 흥미를 잃고 헤매는 경우가 많다는 것과 유사하다. 따라서 본문에서 강조한 대로 복소수의 대상적 이해와 그 복소수 상의 해석학적 개념을 생각한다는 사실 외에 위에 말한 주제어, "왜 정칙성과 해석적 성질이 복소함수에서는 동치가 되는가?"

에 답하는 과정이 복소해석학 개론에 해당하는 부분이고 그 물음에 답하는 과정이 우리가 수업 중에 만나는 내용에 해당한다는 사실을 강조하여 강의 중의 학습 내용을 종횡으로 조합할 수 있는 안목을 학생들에게 갖추게 하는 것이 매우 중요한 요소에 해당할 것이다. 이는 본 전공의 학습성과로 이어질 것이고 이를 경험한 학생들이 장차 현장 교육에서 현장 학생들을 교육하는 데도 상황별 맞춤형 교수법 개발의 증진과 학습효과의 증진하는 학습 팁 개발에 이바지하리라 믿는다.

참고문헌

Ball, D. L., Lubienski, S. T., Mewborn, D. S., & Richardson, V. (2001). Handbook of research on teaching. ed., (pp. 433 – 456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Baumert, J. et al. (2010). Teacher's mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. American educational research journal, 47(1), 133 – 180.

Brown, J. W., & Churchill, R. V. (2014). Complex variables and applications (9th ed.). New York, USA: McGraw-Hill.

Cardano, G. (1545). Ars magna or The Rules of Algebra.

Cho, W. Y. (2011). Mathematical content knowledge of secondary mathematics teachers. School Mathematics, 13(2), 347 – 364.

Conway, J. B. (1986). Functions of One Complex Variable I. Springer.

Derher, A., Lindmeier, A., Heinze, A., & Niemand, C. (2018). What kind of content knowledge do secondary mathematics teachers need? Journal fur Mathematik-Didatik, 39(2), 319 – 341.

Gauss, K. (1799). Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse, PhD thesis on the fundamental theorem of algebra, University of Helmstedt.

Jeong, S. M. (2003). Contents covered in complex analysis at teacher training college, Communications of Mathematical Education, 15, 299 – 3001.

Kang, H. Y. et al. (2011). Mathematics teachers' perspectives on competencies for good teaching and perspective teacher education. School Mathematics, 13(4), 633 – 649.

Kim, H. G., & Lee, J. C. (2007). A study on complex number teaching in 10-level mathematics, School Mathematics, 9(2), 291 – 312.

Klein, F. (1932). Elementary mathematics from an advanced standpoint: arithmetic, algebra, analysis, Vol. 1. New York: Macmillan.

Ko, S. E. et al. (2015). High school mathematics, Good Book Shinsago Co., Ltd.

Lee, D. H. (2012). Development of the concept of complex number and it's educational implications, The Korean Journal for History of Mathematics, 25(3), 53 – 75.

Lee, J. Y. et al. (2019). High school calculus, Chunjae Education Co., Ltd.

Lee, J. Y. et al. (2015). High school mathematics I, II, Chunjae Education Co., Ltd.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistermoolgiques relatifx a la notion de limite, Recherches en Didactique des Mathematiques, 6, pp. 5-67.

Tartaglia, N. (1543). Opera Archimedis Syracusani philosophi et mathematici ingeniosissimi.

Yang, E. Y., & Lee, Y. H. (2008). Logical analysis study on complex numbers section of high school 10-ga textbook, School Mathematics, 10(3), 357 – 374.

Yang, S. A., & Lee, S. J. (2019). Secondary teachers' advanced knowledge for teaching algebra. School Mathematics, 21(2), 419 – 439.

A Study on the Learning and Teaching of Introduction to Complex Analysis in Teacher Training University

Hwang, Jinsoo

<Abstract>

Most students who take the Introduction to Complex Analysis (or Complex Analysis I) course at teacher training colleges believe that analysis was developed on the real number system, and since the number system can be expanded from the real number system to the complex number system, analysis can also be developed on the complex number system. I am approaching this major with the simple logic that it is possible. This will be discussed in the main text below, but it goes beyond the idea of simply developing analytical concepts as an extension of the objective understanding of imaginary numbers. It is derived from the process of thinking about the real and imaginary functions that make up complex functions and exploring analytical concepts. It is important to have a perspective to understand the characteristics of those functions. Therefore, in this paper, I discussed on the misconceptions that students tend to fall into, how to overcome them, and things to keep in mind based on what I felt while teaching the Introduction to Complex Analysis course during the first semester, and also thought about the connection with field education. This will lead students to change their perspective on their major, improve their learning ability and awaken their interest, and further help students develop their own teaching and learning tips beyond the pedagogical perspective as they engage in field education in the future.

keywords: Complex Number, Imaginary Number, Characteristic of Complex Valued Function

학교교육연구, 제14권 2호, pp. 67-74(2024. 09.)

융합교육에 대한 중국학생들의 태도 연구

방채홍*

요약

본 연구는 포용적 교육에 대한 중국 대학생들의 태도를 탐구하고, 포용적 교육 시행 시 직면하는 복잡성과 과제에 초점을 맞췄다. 포용적 교육을 옹호하는 국제적 합의에도 불구하고, 중국과 같은 비서구적 맥락의 다양한 관점과 실질적인 문제가 여전히 논쟁에 영향을 미치고 있다. '특정 학급 출석'으로 알려진 중국의 통합 교육은 국제적인 영향과 재정적 제약, 대규모 학급 규모 등의 실질적인 고려 속에서 계속 발전하고 있다. 정책과 법률은 포용적 교육을 지지하지만, 연구에 따르면 중국 교사와 대학생들은 포용적 교육에 대해 종종 중립적이거나 부정적인 복잡한 태도를 갖고 있는 것으로 나타났다. 이러한 태도에 영향을 미치는 요인에는 학생 장애의 유형과 심각도가 포함되며, 대학생은 시각 또는 신체 장애가 있는 학생을 더 잘 받아들이고 지적 또는 정서적 장애가 있는 학생을 덜 수용한다. 연구는 또한 지역 간 태도의 차이와 이러한 태도를 형성하는 데 있어서 교사 교육의 역할을 지적한다. 연구에 따르면 포용적 교육은 정책 목표이지만 실제 구현에는 심각한 장벽이 있으며 태도 및 체계적 문제를 추가로 해결해야 한다.

* 대구대학교 교육대학원 중국어교육과 교수

Ⅰ. 中國的融合敎育

中國的融合敎育，通常被称爲“融合敎育”，旣有意識形態的根源，也有務實的考慮。國際上支持融合敎育的運動，如1989年的《聯合國儿童權利公約》、1990年和2000年的聯合國敎科文組織“全民敎育”宣言以及1994年的《薩拉曼卡聲明》，都對中國融合敎育的發展産生了重要影響（Potts, 2000）。自20世紀80年代起，中國的相關法律也開始推動敎育領域的融合方式（Deng & Manset, 2000; Deng等, 2001; McCabe, 2003）。中國融合敎育發展的一个重要原因可能在于經濟因素。隨着殘疾儿童入學人數的增長，爲他們建設一套專門的特殊學校网絡將花費過高。將殘疾儿童接納到普通敎室中，可能被視爲是一种更具成本效益的做法（McCabe, 2003）。据Deng & Manset（2000）估計，僅爲中國近500万智力障碍儿童提供獨立的特殊敎育，就需要建立至少21万所新的特殊學校。中國融合敎育面臨的一个重大挑戰是班級規模過大。2006年，約三分之一的中國小學班級人數超過45人（中華人民共和國敎育部，2007）。在大班环境中，敎師往往更傾向于采用標准化的課程和集体敎學，而不是更加个性化的方法（McCabe, 2003）。另一个影響融合敎育的障碍是中國的學校文化，這种文化强調選拔和競爭。敎師們常常根据其學生被頂尖中學彔取的比例而被進行評級（Deng & Manset, 2000; Deng等, 2001）。

Ⅱ. 西方對融合敎育態度的硏究

根据Bizer等人（2003）的定義，態度是對某个人、某件事或某个問題的一种持久而普遍的評价。態度硏究的流行基于這樣的假設：態度可以預測和解釋社會行爲。然而，實証証据并不總是支持這一假設（Ajzen & Fishbein, 2005）。關于融合敎育態度的硏究主要集中在敎師和大學生的態度上。根据西方國家的硏究，敎師和大學生似乎普遍支持融合敎育（Scruggs & Mastropieri, 1996; Jobe等, 1996; Monahan等, 1996; Avramidis & Bayliss, 2000; Burke & Sutherland, 2004）。Scruggs & Mastropieri（1996）指出，敎師對融合敎育的態度可能与實際問題密切相關，因此，当敎師被要求在自己的課堂中接納殘疾學生時，他們的態度可能會更加消极。Avramidis & Norwich（2002）提到，盡管對融合敎育的態度總体上是積极的，但只有少數敎師支持所謂的完全融合。影響對融合敎育態度的兩个最重要因素是學生的殘疾類型和嚴重程度（Avramidis & Norwich; Scruggs & Mastropieri, 1996; Jobe等, 1996; Moberg & Savolainen, 2003）。在所有殘疾類型中，身体或感官殘疾或輕度智力障碍的學生最容易被普通敎

育課堂接納，而有嚴重或多重殘疾的學生則最常被拒絶（Avramidis & Norwich, 2002）。不同國家之間的最大差异似乎体現在對感官殘疾學生的態度上（Avramidis & Norwich, 2002）。

III. 中國對融合教育的態度

關于中國融合教育態度的研究主要集中在小學普通教師的態度上。直到最近，研究人員才開始關注其他目標群体（Chen等, 2006）。然而，中國教師對融合教育的總体態度研究結果并不一致。一些研究表明態度略爲積极（Peng, 2000; Peng, 2003; Wan & Huang, 2005），而另一些研究則發現態度明顯消极（Wei等, 2001; Wei & Yuen, 2000）。此外，Wei等人（2001）在北京和香港的研究結果表明，不同地區的融合教育態度差异很大。

中國學生對融合教育的整体態度似乎略爲消极。這一發現与中國大陸的早期研究結果相一致（Scruggs & Mastropieri, 1996; Avramidis & Norwich, 2002; Wan & Huang, 2005; Wei等, 2001; Wei & Yuen, 2000）。値得注意的是，盡管參与者對融合教育的總体態度并不積极，但他們在問卷的若干具体項目上却表現出了積极的態度。根据Fabrigar等人（2005）的觀点，這种態度上的矛盾是相当正常的，Risbjerg Thomsen（2006）則認爲，這在東亞文化中尤其常見。

Moberg & Savolainen (2003) 在芬蘭和贊比亞的教師中也發現了類似的現象。這表明，在不同文化中，對融合教育的態度可能由相似的潛在因素形成。第一个因素是社會正義，指向普遍的平等原則，而其余三个因素－－滿足有嚴重殘疾學生的特殊需求、保障非殘疾學生的教育質量以及教師的能力－－更多地与融合教育的實際實施相關。因素結构表明，融合教育是原則与實踐的双重問題。

性別、与融合教學相關的教育背景、与殘疾人的接觸經驗、家鄉的地理位置或人口与態度之間沒有顯著的關系。這一發現与中國和其他國家的早期研究相一致，因爲很少有一致性的人口變量能够預測對融合教育的態度。

IV. 學生專業与對融合教育的態度

主修行爲科學（心理學、特殊教育、教育或學前教育）的學生對融合教育的總体態度最爲消极，而主修社會科學的學生態度最爲積极。一种可能的解釋是，不同專業群体的學生根据不同的信息來源形成他們的態度。主修行爲科學的學生的態度可能与他們在融合教育的實際實施中所獲得的經驗有關，而主修社會科學的學生則可能更多地受到融合教育背后的普遍接受的原則的引

導。

V. 不同類型殘疾學生的最佳教育环境評价

學生殘疾的類型和嚴重程度是影響對融合教育態度的兩个最重要的因素（Avramidis& Norwich; Scruggs & Mastropieri, 1996）。同樣，學生殘疾的類型和嚴重程度与參与者所評价的最佳教育环境有顯著關聯。在不同的殘疾群体中，參与者最愿意接納視覺障碍的學生進入普通教室。對于視覺障碍學生的這种積极態度似乎是中國特有的現象，因爲在中國大陸的許多其他研究中也得出了類似的發現。(Chen 2006，Liu et al. 2000; Peng 2003; Wang & Huang 2005)。對這一現象的可能解釋是中國最初成功的融合計划是針對視覺障碍學生進行的。

在普通教室中，身体障碍學生的接受度相對較低，而在中國和其他國家的其他研究中，這些學生通常被欣然接納。(Avramidis & Norwich 2002; Chen et al. 2006; Wang & Huang 2005; Wei et al. 2001）。另一方面，Moberg & Savolainen (2003) 發現，贊比亞的教師也强烈反對身体障碍學生的融合。Moberg & Savolainen (2003) 推測這可能是由于到最近學校的距离遙遠且交通困難。中國農村和山區困難的交通條件可能是導致本研究中發現的對融合身体障碍學生持消极態度的一个可能的解釋。另一个解釋可能是体育訓練在中國學校中的重要角色，因爲這可能對身体障碍學生造成問題。

關于中國融合教育的態度的先行研究發現有兩个方面。首先，大多數中國的研究是針對小學普通教育敎師進行的。而本研究則評估了中國大學生的態度。第二，在本研究中，數据是通過一个尙未在中國背景下正式使用的問卷調查收集來的。這兩点改進都有助于增進在中國對融合教育態度的理解。第三个旣定的改進是收集來自中國主要城市以外地區學生的數据。但最終由于實際原因，本研究的數据，像大多數關于融合教育態度的研究數据一樣，主要來自一个主要城市（北京）。考慮到中國大多數殘障儿童生活在大城市以外的地區，在今后的研究中，數据收集應該也會在農村和更偏遠的地區進行。

盡管融合教育在中國是一个官方目標，但對此的態度却似乎是消极的，或者最多也只是中立的。常見的說法是造成這种消极態度的原因是因爲人們的知識缺乏。另一种解釋是人們已經相当了解情况，但他們基于這些信息而得出的結論却与官方政策不同。理解這些結論可能會爲揭示融合教育所面臨的現有障碍提供一个潛在的方法，而消除這些障碍將會是促進融合教育的最佳途徑。

참고문헌

Ajzen, I., & Fishbein, M. (2005). The influence of attitudes on behavior. In D. Albarracin, B. T. Johnson, M. P. Zanna (Eds.), *The Handbook of Attitudes* (pp. 173–221). NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Avramidis, E., Bayliss, P. & Burden, R. (2000). Student teachers' attitudes towards the inclusion of the children with special educational needs in the ordinary school. *Teaching and Teacher Education*, 16, 277–293.

Avramidis, E. & Norwich, B. (2002). Teachers' attitudes towards integration/inclusion: a review of the literature. *European Journal of Special Education*, 17, 129–147.

Bizer, G. Y., Barden, J. C. & Petty, R. E. (2003). Attitudes. In *Encyclopedia of Cognitive Science* (pp. 247–253). London: Nature Publishing Group.

Burke, K. & Sutherland, C. (2004). Attitudes toward inclusion: Knowledge vs. experience. *Education*, 125, 163–172.

Chen, G., Zhang, Y., Shi, Y., Wang, L. & Wu, Y. (2006). Woguo dalu suiban jiudu taidu yanjiu zongshu [A review of attitudinal researches on learning in regular classes in mainland China]. *Zhongguo Teshu Jiaoyu* [Chinese Journal of Special Education], 78, 27–32.

Deng, M. & Manset G. (2000). Analysis of the "Learning in regular classrooms" movement in China. *Mental Retardation*, 38, 124–130.

Deng, M., Poon-Macbrayer K. F. & Farnsworth E. B. (2001). The development of special education in China, a sociocultural review. *Remedial and Special Education*, 22, 288–298.

Fabrigar, L. R., MacDonald, T. K. & Wegener, D. T. (2005). The Structure of attitudes. In D. Albarracin, B. T. Johnson, M. P. Zanna (Eds.), *The Handbook of Attitudes* (pp. 79–124). NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Jobe, D., Rust, J. O. & Brissie, J. (1996). Teacher attitudes toward inclusion of students with disabilities into regular classrooms. *Education*, 117, 148–153.

Liu, C., Du, X. & Yao, J. (2000). Putong xiaoxue jiaoshi dui ertong jiena taidu yanjiu [A study of regular primary school teachers' acceptance of special needs children]. *Zhongguo Teshu Jiaoyu* [Chinese Journal of Special Education], 27, 34‐36.

McCabe, H. (2003). The beginnings of inclusion in the People's Republic of China. *Research & Practice for Persons with Severe Disabilities*, 28, 16‐22.

Ministry of Education of the People's Republic of China (2007). 2006 nian jiaoyu tongji shuju. Xiaoxue ban e qingkuang [Year 2006 education statistics. Size of primary classes]. Retrieved November 21, 2007 from http://www.moe.edu.cn/edoas/website18/level3.jsp?tablename=2236&infoid=33520

Moberg, S. & Savolainen, H. (2003). Struggling for inclusive education in the North and the South: Educators perceptions on inclusive education in Finland and Zambia. *International Journal of Rehabilitation Research*, 26, 21‐31.

Monahan, R. G., Marino, S. B. & Miller, R. (1996). Teacher attitudes toward inclusion: Implications for teacher education in schools 2000. *Education*, 117, 316‐320.

Peng, X. (2000). Peizhi xuexiao jiaoshi dui canji ertong suiban jiudu de taidu yanjiu [Teachers'attitude toward mainstreaming handicapped students]. *Zhongguo Teshu Jiaoyu* [Chinese Journal of Special Education], 28, 18‐21.

Peng, X. (2003). Teshu xuexiao jiaoshi dui suiban jiudu de taidu diaocha yanjiu [The study on teachers'attitude toward integration handicapped students]. *Zhongguo Teshu Jiaoyu* [Chinese Journal of Special Education], 38, 10‐15.

Potts, P. (2000). A Western perspective on inclusion in Chinese urban educational settings. *International Journal of Inclusive Education*, 4, 301‐313.

Risbjerg Thomsen, S. (2006). Comparing political cultures: Major methodological and substantial results. Politics, Culture and Self ‐ East Asian and North European Attitudes (pp. 90‐123). Copenhagen S: NIAS Press.

Scruggs, T. E. & Matropieri, M. A. (1996). Teacher perceptions of the mainstreaming/inclusion, 1958-1995. A Research Synthesis. *Exeptional Children*, 63, 59‐74.

Wan, L. & Huang, Y. (2005). Benke shifansheng dui suiban jiudu taidu de diaocha [An Investigation into Undergraduate Normal Students' Attitudes towards Children with Special Needs in Regular Class]. *Zhongguo Teshu Jiaoyu* [Chinese Journal of

Special Education], 55, 28 - 31.

Wei, X., Yuan, W. & Liu, Q. (2001). Beijing Xianggang liang di puxiao jiaoshi dui you teshu jiaoyu xuyao xuesheng suiban jiudu taidu de bijiao yanjiu [A comparative study on teachers' attitudes towards school pupils with special needs]. Beijing shifandaxue xuebao [Beijing Normal University academic journal], 163, 34 - 39.

Wei, X. & Yuen, M. T. (2000). Guanyu puxiao jiaoshi yu tejiao jiaoshi dui you teshu jiaoyu xuyao xuesheng suiban jiudu taidu de diaocha [An investigation into teachers'attitudes to special needs in the primary school and special school]. *Zhongguo Teshu Jiaoyu* [Chinese Journal of Special Education], 27, 31 - 33.

中國學生對融合教育態度的研究

方彩虹

<摘要>

本研究探討了中國大學生對融合教育的態度，重点關注其實施過程中面臨的复雜性和挑戰。盡管國際共識提倡融合教育，但在非西方背景下，如中國，不同的觀点和實際問題仍然影響着這場辯論。中國的融合教育，即“融合教育”，在國際影響和實際考慮（如財務限制和大班教學）下不斷發展。盡管政策和法律支持融合教育，但研究發現中國教師和大學生對融合教育的態度較爲复雜，常表現爲中立或負面。影響這些態度的因素包括學生殘疾的類型和嚴重程度，大學生對視覺或身体障碍學生的接受度較高，而對智力或情緒障碍學生的接受度較低。研究還指出了地區之間的態度差异，以及教師教育在塑造這些態度中的作用。研究表明，盡管融合教育是政策目標，但其實際實施仍面臨重大障碍，需要進一步解決態度和系統性挑戰。